CÁLCULO EM QUADRINHOS

Roteiro e Arte:
Larry Gonick

Blucher

CÁLCULO
EM QUADRINHOS

CÁLCULO EM QUADRINHOS

Larry Gonick

CONTEÚDO

AGRADECIMENTOS

O DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DE HARVARD, EM OUTRA ÉPOCA, ENCHEU A CABEÇA DO AUTOR COM ESTE NEGÓCIO: JOHN TATE, MEU PRIMEIRO PROFESSOR DE CÁLCULO, LYNN LOOMIS, SHLOMO STERNBERG, RAOUL BOTT, DAVID MUMFORD, BARRY MAZUR, ANDREW GLEASON, LARS AHLFORS E GEORGE MACKEY, CUJO FILHO FUNDOU A CADEIA DE MERCADOS WHOLE FOODS, FONTE DE MUITO DO CHOCOLATE QUE ME ABASTECEU DURANTE A ESCRITA DESTE LIVRO. INDO PARA O MIT, VICTOR GUILLEMIN ORIENTOU A MINHA JAMAIS FINALIZADA TESE, E NAGISETTY RAO DO INSTITUTO TATA EM MUMBAI ME ENSINOU A APRECIAR A ANÁLISE "PÉ NO CHÃO" SEM MUITA ÁLGEBRA. MAIS RECENTEMENTE, UM CONJUNTO DE PESSOAS ME AJUDOU A PENSAR NOVAMENTE A RESPEITO DO CÁLCULO: JAMES MAGEE EXAMINOU COM CUIDADO OS PRIMEIROS CAPÍTULOS E FEZ COM QUE ME MANTIVESSE PRÓXIMO AO CURRÍCULO; ALGUMAS DISCUSSÕES VIGOROSAS COM DAVID MUMFORD ESCLARECERAM QUESTÕES SOBRE RIGOR E INTUIÇÃO; CRAIG BENHAM, ANDREW MOSS E MARK WHEELIS AGUENTARAM MEUS DISCURSOS SOBRE VELOCÍMETROS, EIXOS PARALELOS E VÁRIOS ASSUNTOS RELACIONADOS. AGRADEÇO A TODOS E, ESPECIALMENTE, ÀS PESSOAS QUE CRIARAM O FONTOGRAPHER, ESTE SOFTWARE MARAVILHOSO QUE TORNOU POSSÍVEL A COMPOSIÇÃO DO TEXTO MATEMÁTICO DE MODO "MANUSCRITO"!

PARA DAVID MUMFORD,

MENTOR, BENEMÉRITO E AMIGO

CONDIÇÕES INICIAIS

CAPÍTULO - 1

VELOCIDADE ESCALAR, VELOCIDADE, MUDANÇA

IDEIA BÁSICA Nº 1

CÁLCULO É A MATEMÁTICA DA MUDANÇA, E ESTA É MISTERIOSA. ALGUMAS COISAS CRESCEM IMPERCEPTIVELMENTE... OUTRAS NÃO... O CABELO CRESCE LENTAMENTE E É CORTADO SUBITAMENTE... TEMPERATURAS SOBEM E DESCEM... A FUMAÇA FORMA ROLOS NO AR... OS PLANETAS GIRAM NO ESPAÇO... E O TEMPO, O TEMPO NUNCA PARA...

PENSE BEM SOBRE AS MUDANÇAS E VOCÊ PODERÁ CHEGAR A ALGUMAS CONCLUSÕES UM POUCO ESTRANHAS. POR EXEMPLO, NA GRÉCIA ANTIGA, **ZENÃO DE ELEIA** PENSOU A RESPEITO DA MUDANÇA E SE CONVENCEU QUE O **MOVIMENTO É IMPOSSÍVEL**. SEU RACIOCÍNIO ERA MAIS OU MENOS ESTE:

MOVIMENTO É UMA MUDANÇA DE POSIÇÃO AO LONGO DO TEMPO.

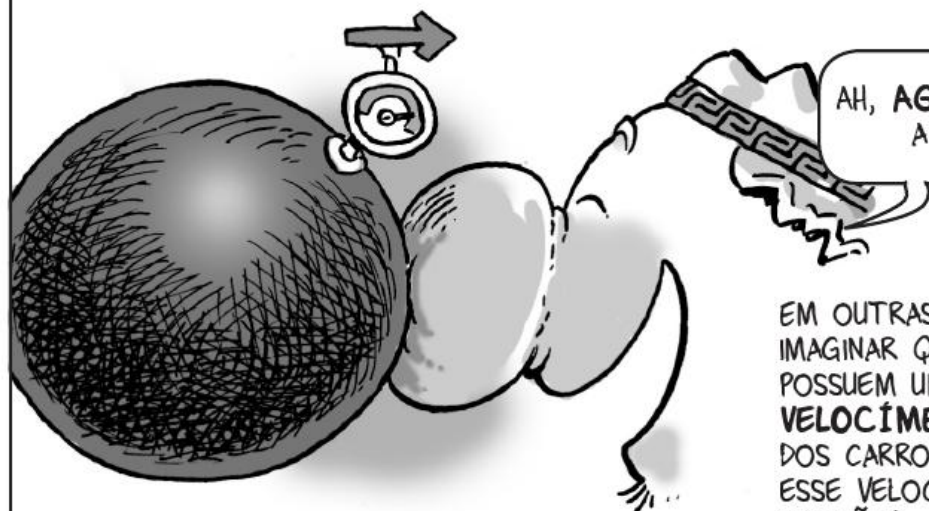
NUM **INSTANTE** QUALQUER, NÃO OCORRE NENHUMA MUDANÇA DE POSIÇÃO.

ASSIM, **NÃO PODE HAVER MOVIMENTO** NUM DADO INSTANTE.

MAS O TEMPO É UMA SUCESSÃO DE INSTANTES.

LOGO, O MOVIMENTO **NUNCA** ACONTECE!

EI! COMO FOI QUE EU CHEGUEI AQUI?

ISAAC NEWTON E **GOTTFRIED LEIBNIZ** ENXERGARAM O PROBLEMA DESTA FORMA: AINDA QUE UMA BALA DE CANHÃO EM MOVIMENTO NÃO VÁ A LUGAR ALGUM EM DETERMINADO INSTANTE, AINDA HÁ **ALGO** QUE INDICA O MOVIMENTO.

CAPÍTULO 0

APRESENTANDO AS FUNÇÕES

NO QUAL APRENDEREMOS ALGO SOBRE RELACIONAMENTOS

COMEÇAMOS COM UMA DAS IDEIAS MAIS BELAS E FECUNDAS DA MATEMÁTICA MODERNA: A **FUNÇÃO**. TUDO NESTE LIVRO SERÁ SOBRE FUNÇÕES. ASSIM... O QUE É UMA FUNÇÃO?

UMA FUNÇÃO É UMA ESPÉCIE DE **CAIXA-PRETA COM ENTRADA E SAÍDA** OU UM **PROCESSADOR DE NÚMEROS**. UMA FUNÇÃO (DENOMINAMOS f) ENGOLE E EXPELE NÚMEROS DE MODO ESPECÍFICO. PARA CADA NÚMERO ENGOLIDO (DENOMINAMOS x), f EXPELE UM NÚMERO ÚNICO, SINGULAR, $f(x)$, PRONUNCIADO "EFE DE XIS". f É COMO UMA REGRA QUE TRANSFORMA x EM $f(x)$. ENTRA x, SAI $f(x)$.

f

2

f

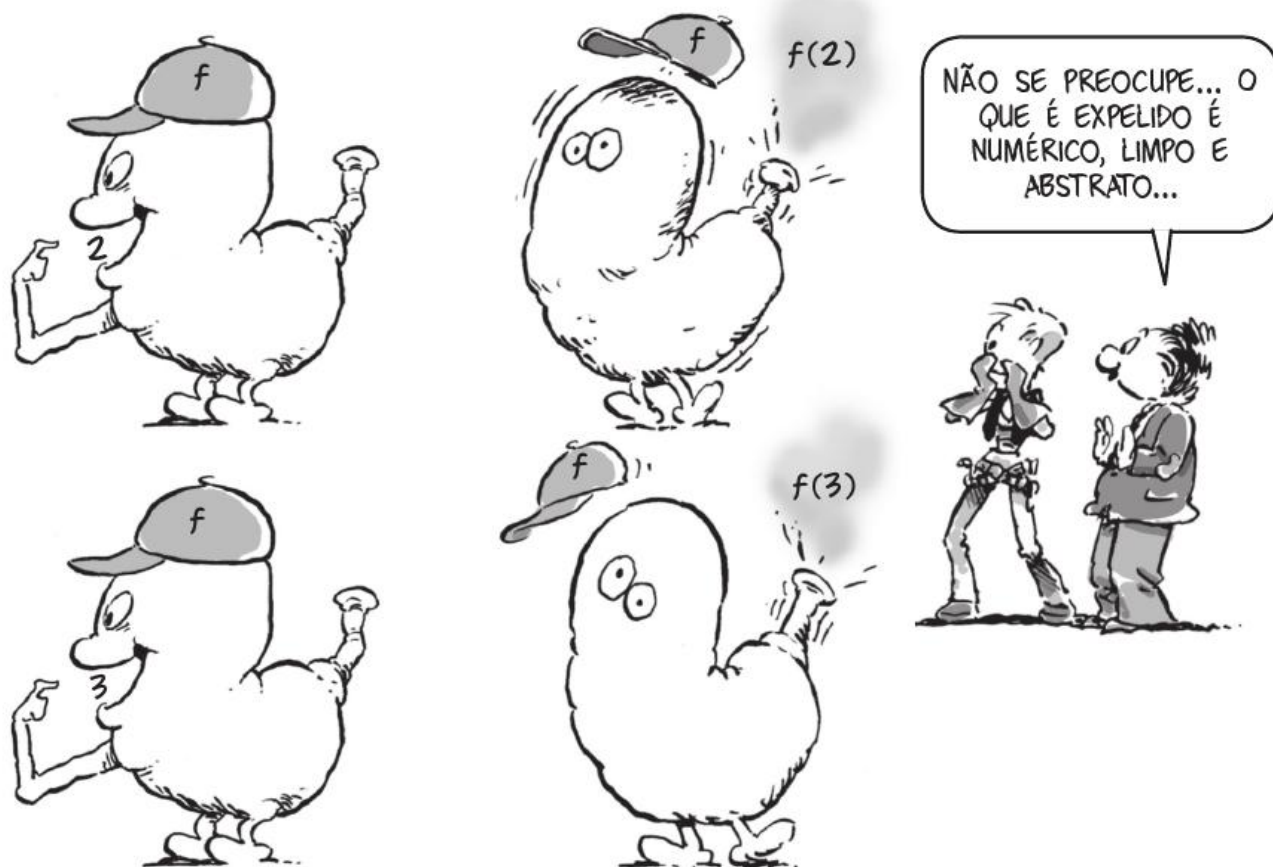
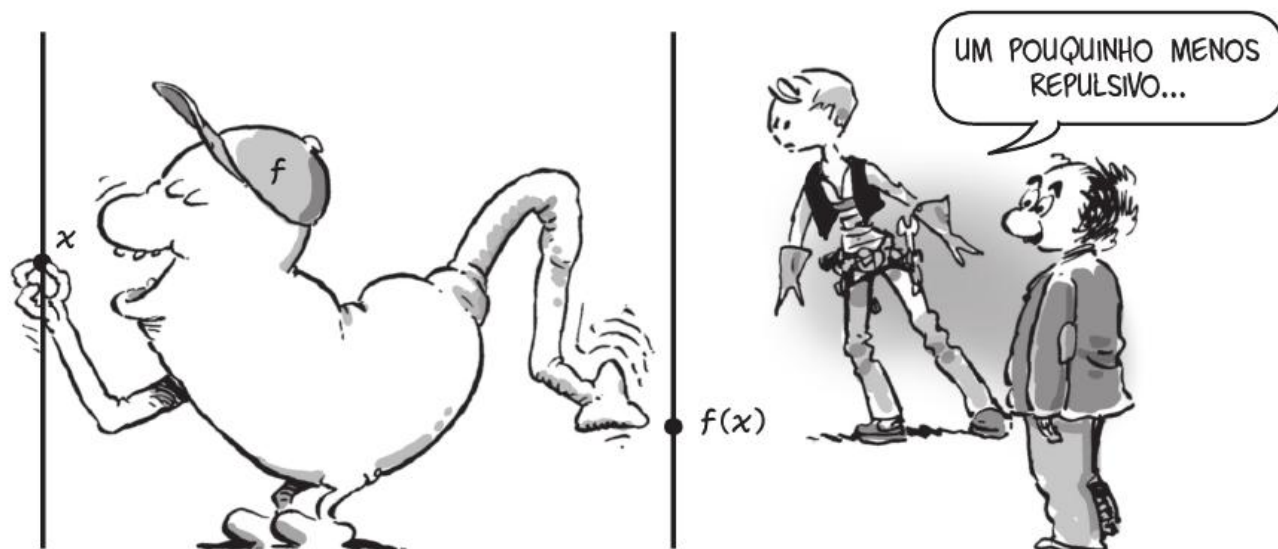
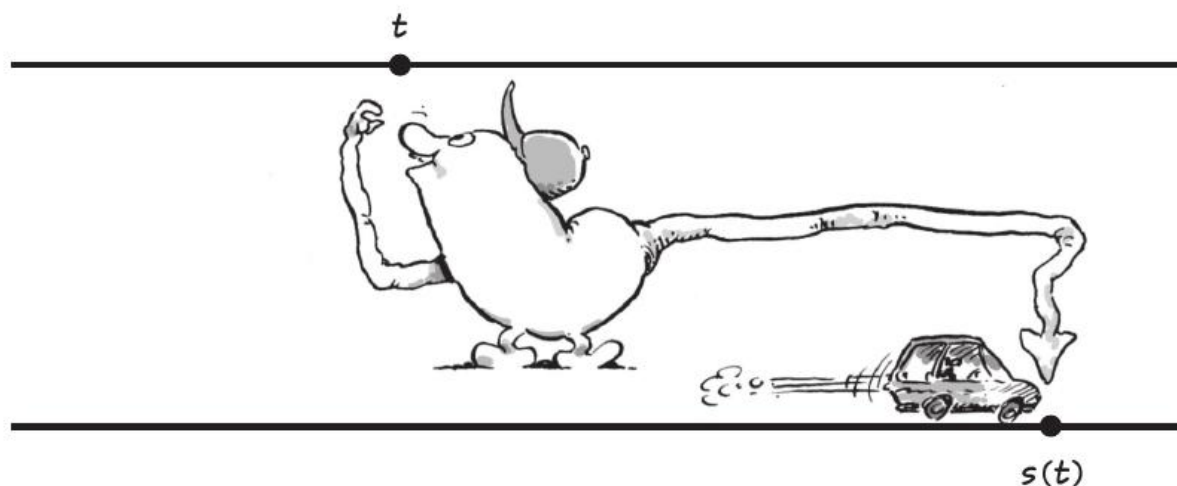
f(2)

NÃO SE PREOCUPE... O QUE É EXPELIDO É NUMÉRICO, LIMPO E ABSTRATO...

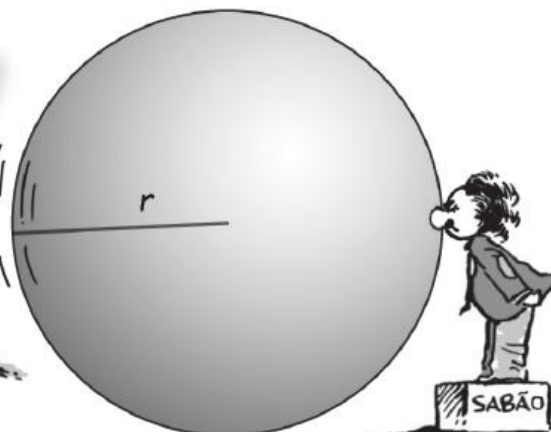
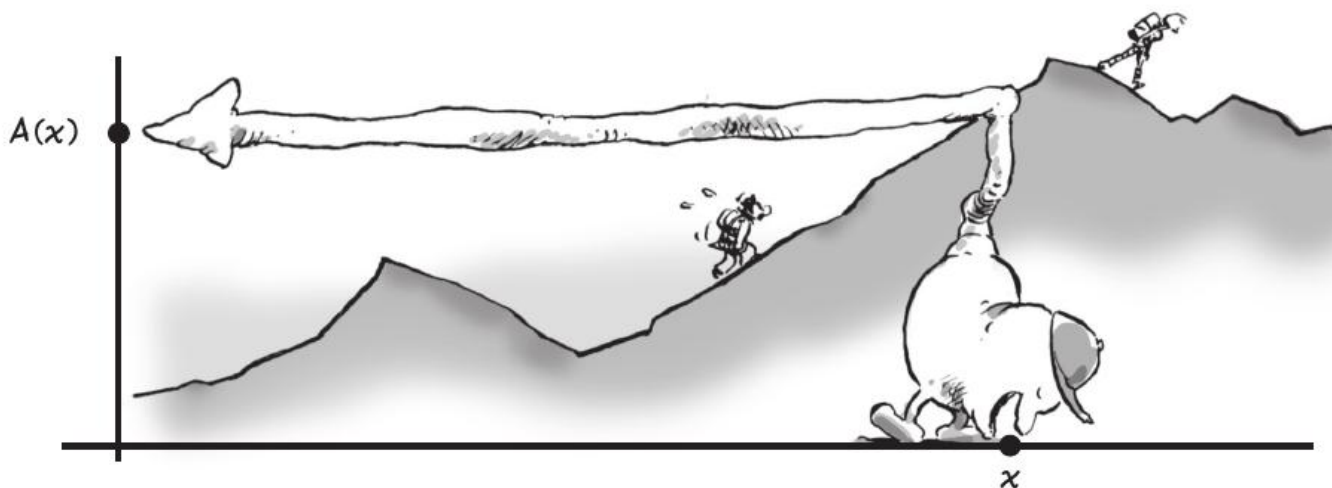
f

3

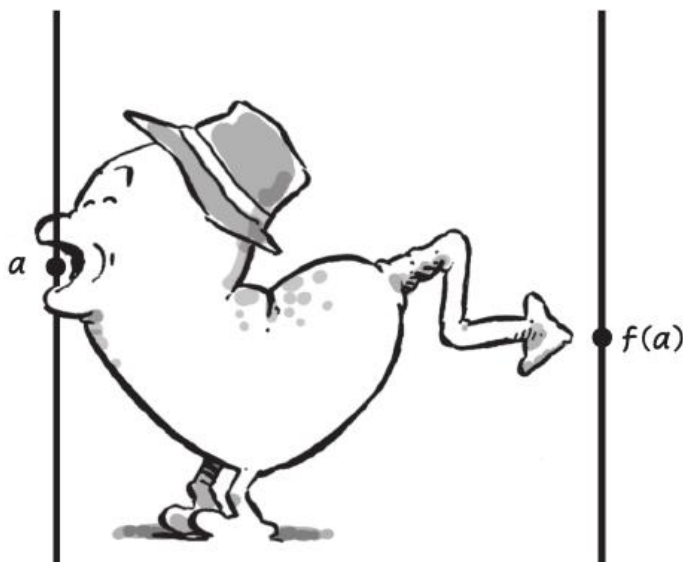
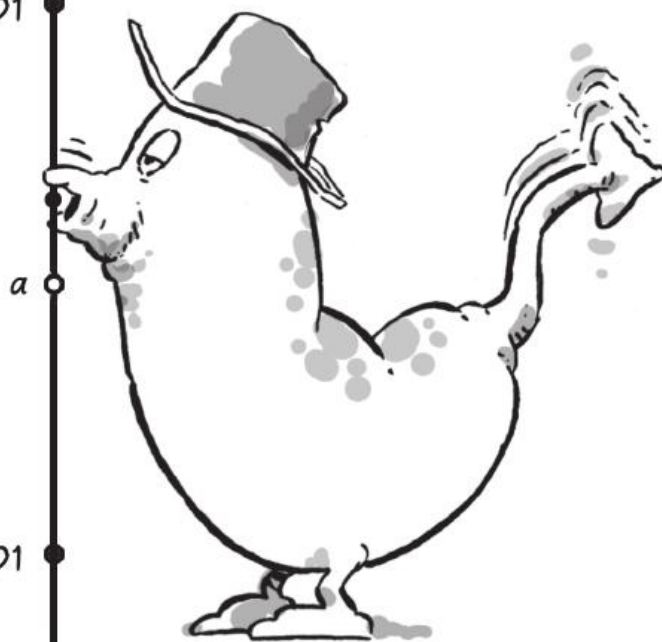
f

f(3)

SE VOCÊ NÃO GOSTA QUE O EXPELIDO FIQUE VAGANDO PELO AR COMO GÁS DO PÂNTANO, ENTÃO, PENSE NOS NÚMEROS COMO SE ELES ESTIVESSEM DISPOSTOS NUMA LINHA RETA. NESTE CASO, VOCÊ PODE IMAGINAR UMA FUNÇÃO f ENGOLINDO NÚMEROS DE UMA LINHA E MERAMENTE **APONTANDO** PARA OS VALORES CORRESPONDENTES DE SAÍDA NUMA OUTRA LINHA.

POR EXEMPLO, A POSIÇÃO s DE UM CARRO É UMA FUNÇÃO DO TEMPO t. VOCÊ PODE PENSAR EM s COMO LENDO O TEMPO (OU ENGOLINDO ESTE COMO ENTRADA) DE UMA LINHA E APONTANDO PARA A POSIÇÃO $s(t)$ DO CARRO NUMA PISTA.

MAIS EXEMPLOS:

A PRESSÃO ATMOSFÉRICA DEPENDE DA ALTITUDE: PARA CADA ALTITUDE A, EXISTE UMA PRESSÃO DEFINIDA $P(A)$. A FUNÇÃO P ENGOLE ALTITUDE E EXPELE PRESSÃO.

À MEDIDA QUE UM BALÃO ESFÉRICO É INFLADO, SEU VOLUME É FUNÇÃO DO RAIO. CADA RAIO r DETERMINA UM VOLUME ÚNICO $V(r)$.

NUMA TRILHA RETA DE MONTANHA, A ALTITUDE É FUNÇÃO DA POSIÇÃO AO LONGO DA TRILHA. CADA POSIÇÃO x CORRESPONDE A UMA ÚNICA ALTITUDE $A(x)$.

CAPÍTULO 1
LIMITES

UMA GRANDE IDEIA A RESPEITO DE COISAS PEQUENAS

O ÚLTIMO CAPÍTULO TRATOU DE FUNÇÕES "FIXAS", POR ASSIM DIZER. DADO UM PONTO x, SEGUIMOS A SETA ATÉ O **LOCAL** DE $f(x)$.

AGORA O CÁLCULO APRESENTA UMA NOVA IDEIA: NÃO APENAS O VALOR DE UMA FUNÇÃO NO PONTO a, MAS COMO $f(x)$ SE APRESENTA NAS PROXIMIDADES, MAS **MUITO PRÓXIMO MESMO**, DE a. DE FATO, PODEREMOS ESTAR INTERESSADOS NOS PONTOS x DA VIZINHANÇA MESMO QUE A FUNÇÃO NÃO SEJA DEFINIDA NO PONTO a!!

POR QUÊ? A RAZÃO VEM DA IDEIA DE NEWTON E LEIBNIZ A RESPEITO DA **VELOCIDADE.** (VER PÁGINAS 15-16.)

LEMBRE-SE, A IDEIA DELES ERA ESTA: SE $s(t)$ É A POSIÇÃO NUM INSTANTE t, E a É UM MOMENTO NO TEMPO, ENTÃO, QUANDO t ESTÁ PRÓXIMO A a, A VELOCIDADE NO INSTANTE a É MUITO PRÓXIMA AO "QUOCIENTE DE DIFERENÇA" $D(t)$.

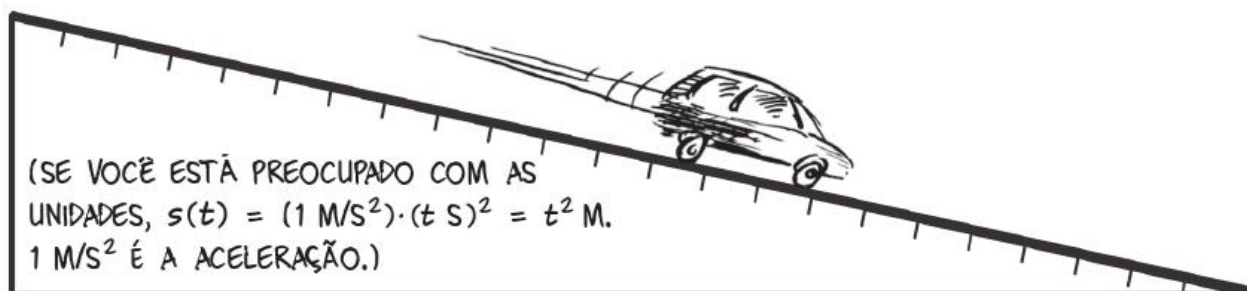
$$D(t) = \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

D É UMA FUNÇÃO DE t QUE NÃO É DEFINIDA EM $t = a$, MAS É DEFINIDA QUANDO t É **PRÓXIMO** DE a. À MEDIDA QUE t SE APROXIMA DE a, ESPERAMOS QUE $D(t)$ SE APROXIME DA VELOCIDADE INSTANTÂNEA EM a. NÓS IREMOS QUERER ESCREVER

$$v(a) = \lim_{t \to a} D(t)$$

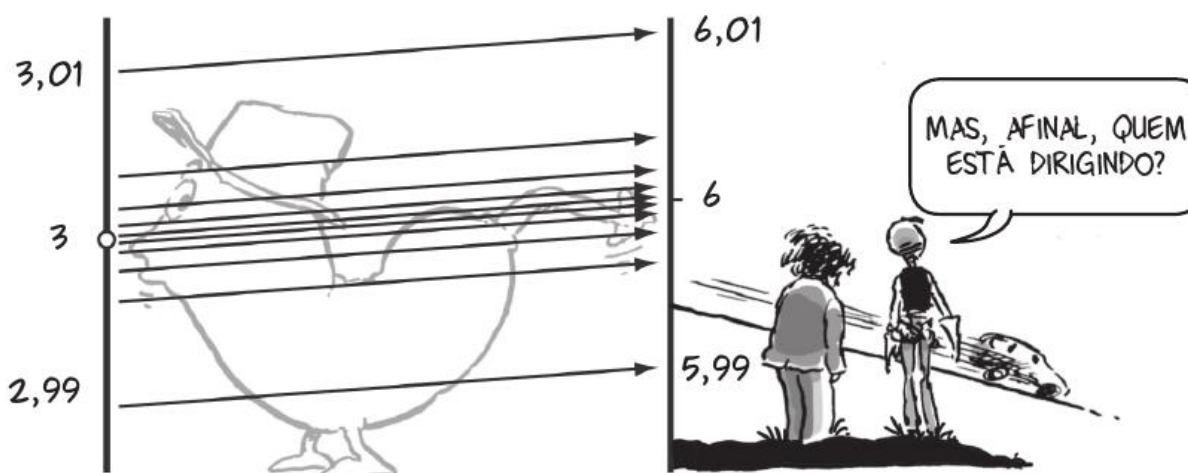
E DIZEMOS QUE $v(a)$ É O **LIMITE** DE $D(t)$ QUANDO t TENDE A a.

POR EXEMPLO, ASSIM ACONTECE NUMA RAMPA EM ÂNGULO LIGEIRAMENTE SUPERIOR A 11,77 GRAUS, EM QUE UM VEÍCULO SEM ATRITO, PARTINDO DO REPOUSO EM $s = 0$, DESCERÁ CONFORME A FÓRMULA

$$s(t) = t^2 \text{ METROS}$$

ENTÃO, PRÓXIMO A UM PONTO NO INSTANTE a,

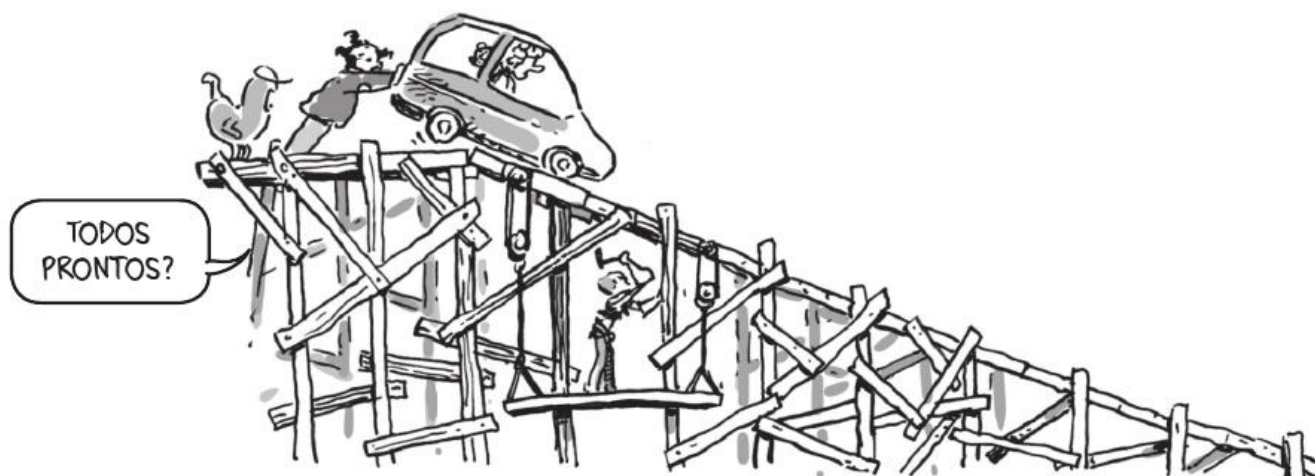
$$D(t) = \frac{t^2 - a^2}{t - a}$$

VAMOS SUPOR QUE $a = 3$ S, E VEJAMOS O QUE ACONTECE COM $D(t)$ QUANDO t ESTÁ PRÓXIMO A a:

t	$t - 3$	$t^2 - 9$	$D(t)$
2,9	-0,1	-0,59	**5,9**
2,99	-0,01	-0,0599	**5,99**
2,999	-0,001	-0,005999	**5,999**
...	...	...	...
3,001	0,001	0,006001	**6,001**
3,01	0,01	0,0601	**6,01**
3,1	0,1	0,61	**6,1**

CAPÍTULO 2

A DERIVADA

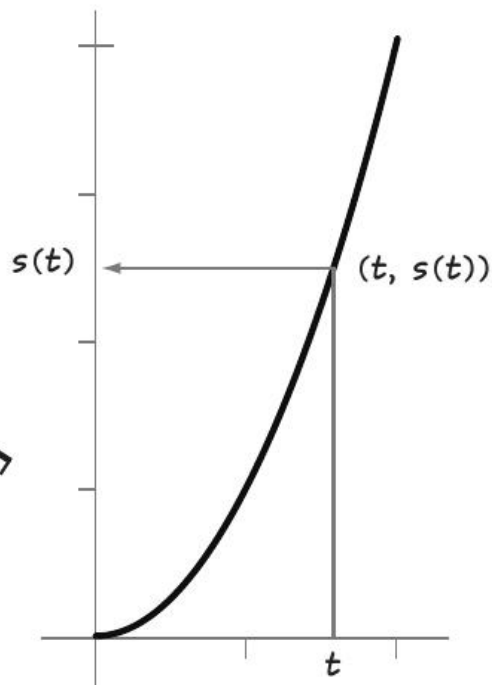
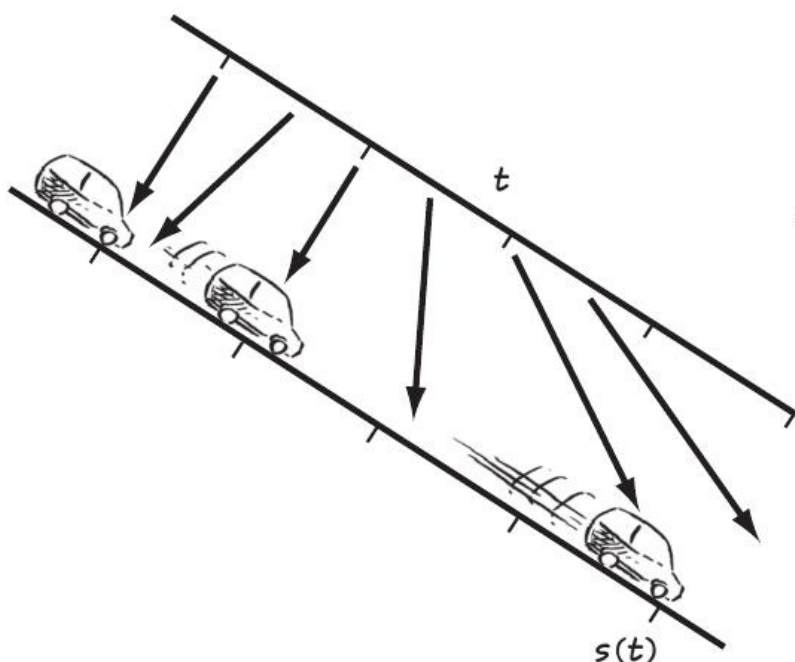
GANHANDO VELOCIDADE

AGORA CHEGAMOS AO CORAÇÃO DO CÁLCULO: A **TAXA DE VARIAÇÃO** DE UMA FUNÇÃO. POR EXEMPLO, SEJA A FUNÇÃO $s(t) = t^2$ QUE DESCREVE UM CARRO DESCENDO UMA RAMPA.

PODEMOS ENXERGAR A FUNÇÃO s DE PELO MENOS DUAS MANEIRAS:

1. s ADMITE ENTRADAS t DE UMA LINHA DO TEMPO E APONTA PARA A POSIÇÃO $s(t)$ DO CARRO NA PISTA.

t

$s(t)$

2. O GRÁFICO $y = s(t)$, NESTE CASO $y = t^2$, UMA PARÁBOLA.

$s(t)$

$(t, s(t))$

t

1. NA IMAGEM DA LINHA DO TEMPO, ELA É SIMPLESMENTE A VELOCIDADE DAS PONTAS DAS SETAS DA FUNÇÃO, À MEDIDA QUE ESTAS SE MOVEM AO LONGO DO EIXO **S**! A PONTA DA SETA COINCIDE COM O CARRO, ASSIM AMBOS TÊM A MESMA VELOCIDADE.

A "CAUDA" DA FUNÇÃO SE MOVE AO LONGO DO EIXO s COM VELOCIDADE $v(a)$ EM $t = a$.

2. NO INSTANTE $t = a$, A VELOCIDADE $v(a)$ É

$$v(a) = \lim_{t \to a} \frac{s(t) - s(a)}{t - a}$$

COMO VIMOS NA PÁGINA 62. A VELOCIDADE **MÉDIA** NO INTERVALO (a, t) SE APROXIMA DA VELOCIDADE **INSTANTÂNEA** À MEDIDA QUE O INTERVALO DIMINUI. COMO ANTES, FAZEMOS $h = t - a$ E REESCREVEMOS O QUOCIENTE DE DIFERENÇAS:

$$\frac{s(a + h) - s(a)}{h}$$

ENTÃO O LIMITE FICA NA FORMA

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{s(a + h) - s(a)}{h}$$

NESTE CASO, QUANDO $s(t) = t^2$, PODEMOS DE FATO AVALIAR ESTA EXPRESSÃO:

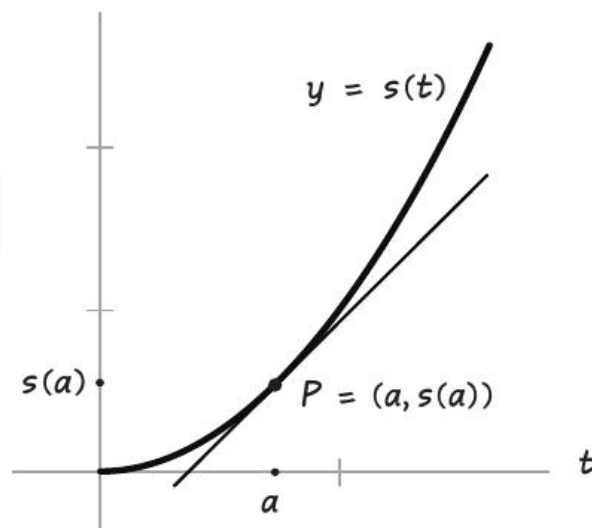
$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a + h)^2 - a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2a + h)$$

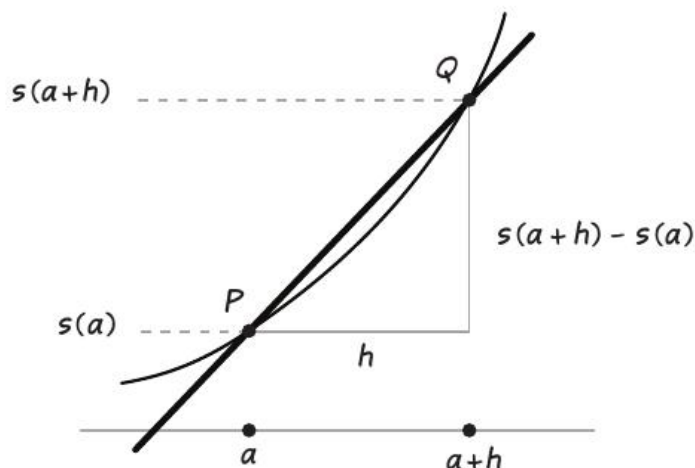
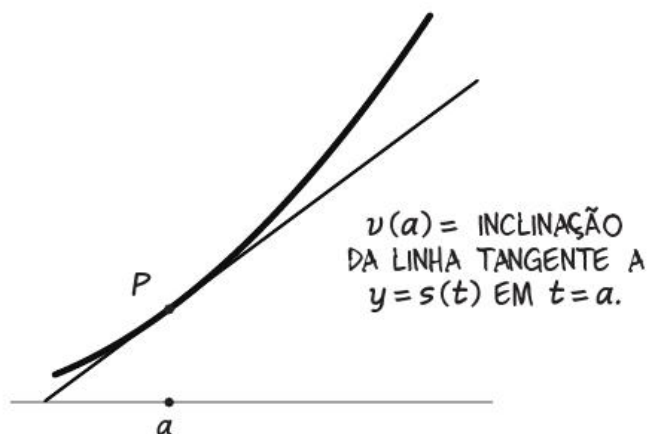
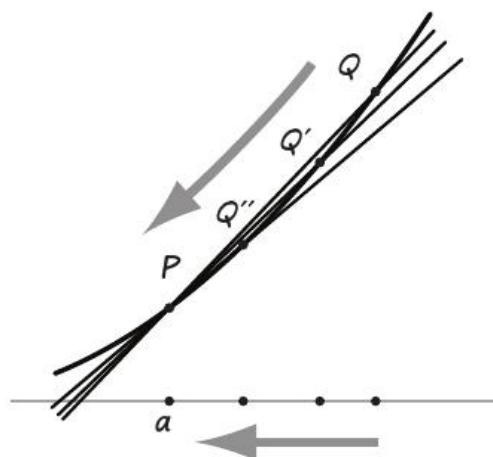
$$= 2a$$

ESTA É A VELOCIDADE DO CARRO NO INSTANTE $t = a$.

3. NO GRÁFICO $y = s(t)$, A VELOCIDADE $v(a)$ NO INSTANTE a É A **INCLINAÇÃO DO GRÁFICO EM $t = a$.**

ISTO É VERDADE, POIS NÓS **DEFINIMOS** A INCLINAÇÃO DE UMA CURVA COMO O **LIMITE** DAS INCLINAÇÕES DE LINHAS. A RAZÃO

$$\frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

É A INCLINAÇÃO DE UMA LINHA, OU **CORDA**, QUE UNE DOIS PONTOS DA CURVA:

$P = (a, s(a))$ E
$Q = (a+h, s(a+h))$.

À MEDIDA QUE $h \longrightarrow 0$, Q DESLIZA EM DIREÇÃO A P E AS INCLINAÇÕES DAS CORDAS PQ, PQ', PQ'' ETC. SE APROXIMAM DE UM VALOR LIMITE, QUE INTERPRETAMOS COMO SENDO A **INCLINAÇÃO DA CURVA** NO PONTO P. SE $s(t) = t2$, ACABAMOS DE DESCOBRIR QUE ESTA INCLINAÇÃO É $v(a) = 2a$.

CAPÍTULO 3

CADEIA, CADEIA, CADEIA

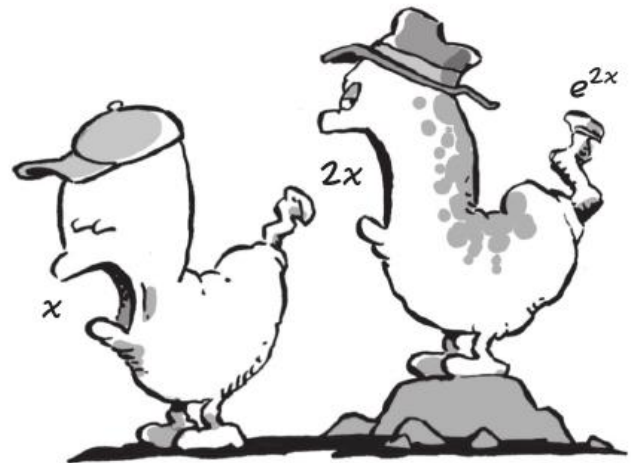
FUNÇÕES COMPOSTAS, ELEFANTES, RATOS E PULGAS

AGORA ESTAMOS CORRENDO... OU, TALVEZ, AINDA RASTEJANDO... RASTEJANDO ATRÁS DE FÓRMULAS... SENDO ASSIM, VAMOS CONTINUAR RASTEJANDO? ESTE CAPÍTULO COMEÇA COM A DEDUÇÃO DAS DERIVADAS DE TODAS AS FUNÇÕES ELEMENTARES REMANESCENTES E DE FÓRMULAS LEGAIS E SIMPLES...

A CHAVE PARA DERIVAR ESTAS FÓRMULAS (E MUITAS OUTRAS ALÉM DELAS) É ALGO CHAMADO **REGRA DA CADEIA**. COMEÇAREMOS CONTANDO O QUE ELA É, EM SEGUIDA A USAREMOS E, FINALMENTE, VAMOS EXPLICAR PORQUE ELA É VERDADEIRA.

A REGRA DA CADEIA É UM PROCEDIMENTO PARA DERIVAR FUNÇÕES **COMPOSTAS**, FUNÇÕES FEITAS PELA APLICAÇÃO DE UMA FUNÇÃO A OUTRA. (VEJA PÁGINAS 46-47). POR EXEMPLO,

$$h(x) = e^{2x}$$

AQUI A FUNÇÃO INTERNA É $u(x) = 2x$, ENQUANTO A FUNÇÃO EXTERNA É $v(u) = e^u$.

A REGRA DA CADEIA:

PARA DIFERENCIAR UMA COMPOSIÇÃO $h(x) = v(u(x))$, SIGA ESTES PASSOS:

1. DIFERENCIE A FUNÇÃO INTERNA, OU SEJA, ENCONTRE $u'(x)$.

2. TRATE A FUNÇÃO INTERIOR u COMO SE FOSSE UMA VARIÁVEL. DIFERENCIE A FUNÇÃO EXTERNA COM RESPEITO A u, OU SEJA, ENCONTRE $v'(u)$.

3. MULTIPLIQUE OS RESULTADOS DE **1** E **2**.

4. FINALMENTE, SUBSTITUA u POR $u(x)$ EM $v'(u)$.

EM SÍMBOLOS,

$$h'(x) = u'(x) \cdot v'(u(x))$$

ISTO PROVAVELMENTE APARENTA SER PIOR DO QUE REALMENTE É. EM ESSÊNCIA, A REGRA DA CADEIA SIMPLESMENTE DIZ PARA MULTIPLICAR A DERIVADA DA FUNÇÃO INTERNA PELA DERIVADA DA FUNÇÃO EXTERNA.

EXEMPLO: COMO APRESENTADO AQUI, SUPONHA $h(x) = e^{2x}$. IREMOS PASSO A PASSO:

1. $u'(x) = 2$

2. $v'(u) = e^u$

3. O PRODUTO É $2e^u$

4. SUBSTITUÍMOS u POR $u(x) = 2x$ PARA OBTERMOS O RESULTADO FINAL:

$$h'(x) = \mathbf{2e^{2x}}$$

EXEMPLO: $G(x) = \text{sen}\,(x^2)$. A FUNÇÃO INTERNA É $u(x) = x^2$. A FUNÇÃO EXTERNA É $v(u) = \text{sen}\,u$.

1. $u'(x) = 2x$

2. $v'(u) = \cos u$

3. O PRODUTO É $2x \cos u$

4. ESCREVENDO $u(x) = x^2$ NO LUGAR DE u CHEGA-SE À DERIVADA:

$$G'(x) = \mathbf{2x\,\text{sen}\,(x^2)}$$

MAIS UM EXEMPLO!

$f(x) = (2x^3 + 3)^8$.

FUNÇÃO INTERNA: $u(x) = 2x^3 + 8$.

FUNÇÃO EXTERNA: $v(u) = u^8$

$$f'(x) = u'(x)g'(u)$$
$$= (6x^2)(8u^7)$$
$$= (6x^2)(8(2x^3 + 3)^7)$$
$$= \mathbf{48x^2(2x^3 + 3)^7}$$

AQUI A REGRA DA CADEIA NOS PERMITE DIFERENCIAR UM POLINÔMIO MONSTRO DE 240 GRAUS, SEM PRIMEIRO TER DE EXPANDI-LO.

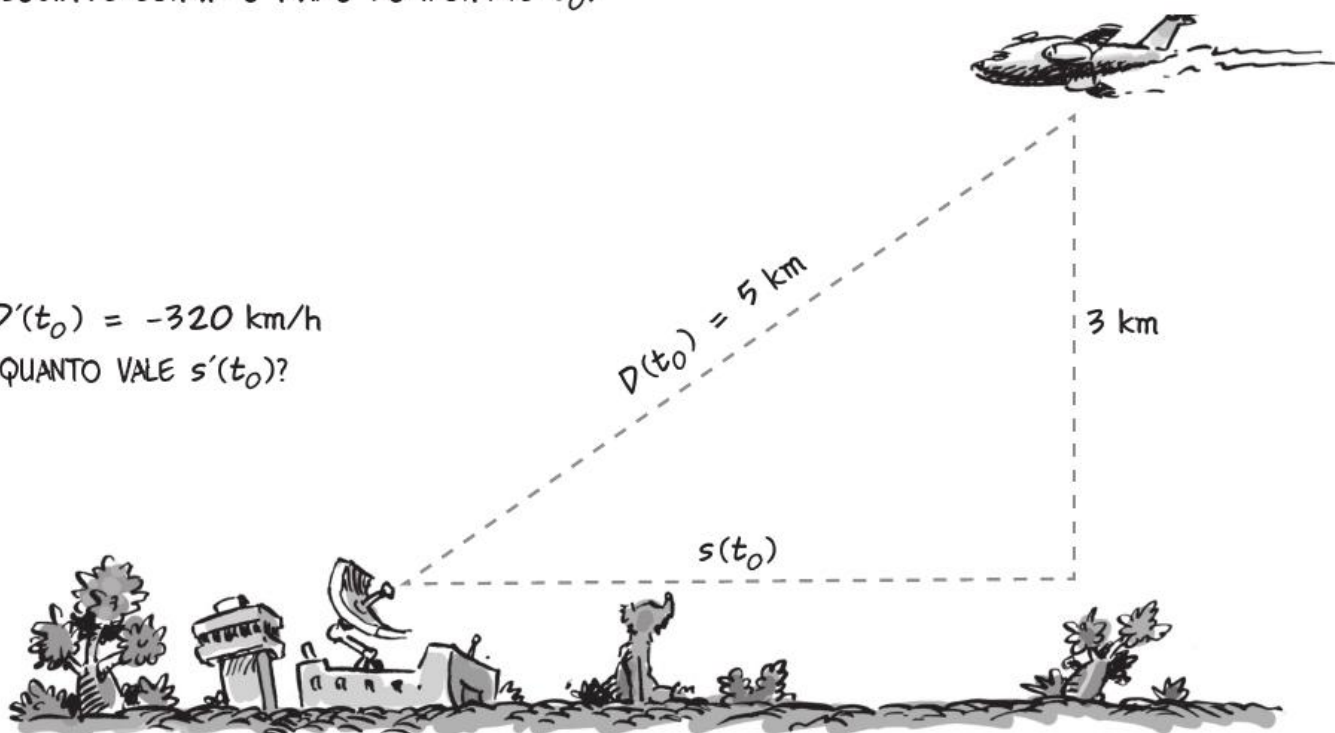
CAPÍTULO 4

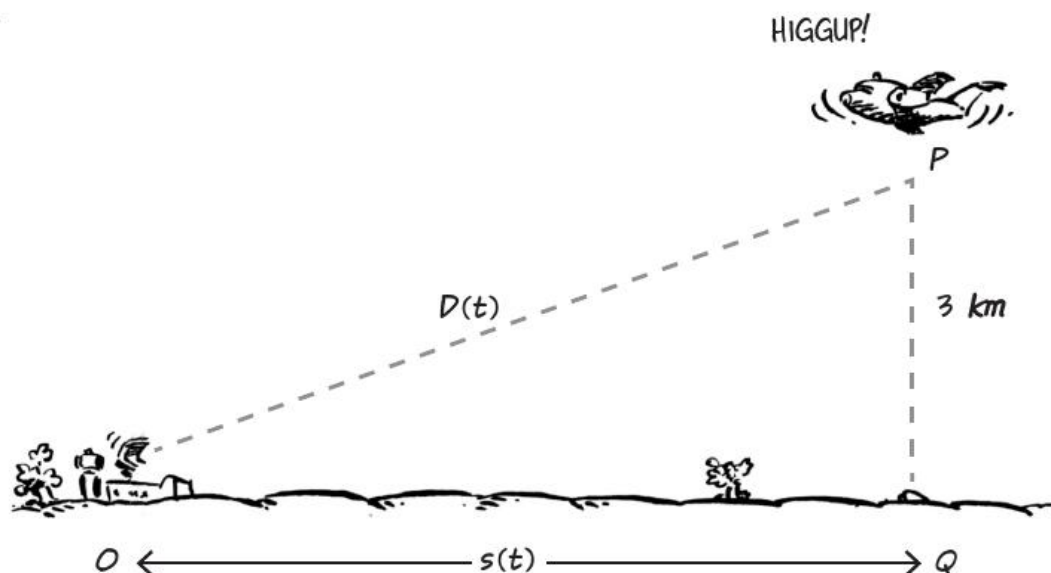
USANDO DERIVADAS, PARTE 1: TAXAS RELACIONADAS

NO QUAL REALMENTE FALAREMOS SOBRE O MUNDO REAL

A REGRA DA CADEIA É MAIS DO QUE UMA FÓRMULA PARA ENCONTRAR DERIVADAS: ELA NOS AJUDA A **RESOLVER PROBLEMAS.**

EXEMPLO 1:

UM AVIÃO VOANDO A ALTITUDE CONSTANTE DE 3 KM ESTÁ SENDO RASTREADO POR UMA ESTAÇÃO DE RADAR NO SOLO. NUM DETERMINADO INSTANTE t_0, A EQUIPE DO RADAR AVALIA QUE O AVIÃO ESTÁ A 5 KM DE DISTÂNCIA E ESSA DISTÂNCIA DIMINUI A UMA TAXA DE 320 KM/H. A QUE VELOCIDADE ESTAVA O AVIÃO NO INSTANTE t_0?

NUM INSTANTE t QUALQUER, O RADAR ESTÁ NUM VÉRTICE DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO OPQ, SENDO A HIPOTENUSA $D(t)$. SE $s(t)$ É O DESLOCAMENTO **HORIZONTAL** DO AVIÃO NUM INSTANTE t, NÓS ESTAMOS PERGUNTANDO QUANTO É $s'(t)$, A DERIVADA DE s?

VOCÊ PODE QUERER SABER COMO ENCONTRAMOS $s'(t)$ QUANDO NÃO TEMOS A **MENOR IDEIA** DE COMO É s. O PILOTO PODE ESTAR ACELERANDO OU DESACELERANDO, COMO UM BÊBADO!

É ISTO O QUE SABEMOS:

$$D^2 - s^2 = 3^2$$ E TAMBÉM

$D(t_0) = 5 \quad s(t_0) = 4 \quad D'(t_0) = -320$

MESMO SEM CONHECER AS FUNÇÕES $s(t)$ E $D(t)$, A PRIMEIRA EQUAÇÃO IMPLICA A EXISTÊNCIA DE UMA RELAÇÃO ENTRE AS SUAS DERIVADAS. PELA REGRA DA CADEIA, PODEMOS ENCONTRAR A DERIVADA DO QUADRADO DE UMA FUNÇÃO: $\frac{d}{dx}(f)^2 = 2f'f$. (VEJA O EXEMPLO 7, PÁGINA 116). ASSIM NÓS DERIVAMOS:

$$2DD' - 2ss' = 0$$

ASSIM

$$s' = \frac{DD'}{s}$$ SEMPRE QUE $s(t) \neq 0$

ENTÃO, NO INSTANTE t_0,

$$s'(t_0) = \frac{5}{4}(-320) = -400 \text{ km/h}$$

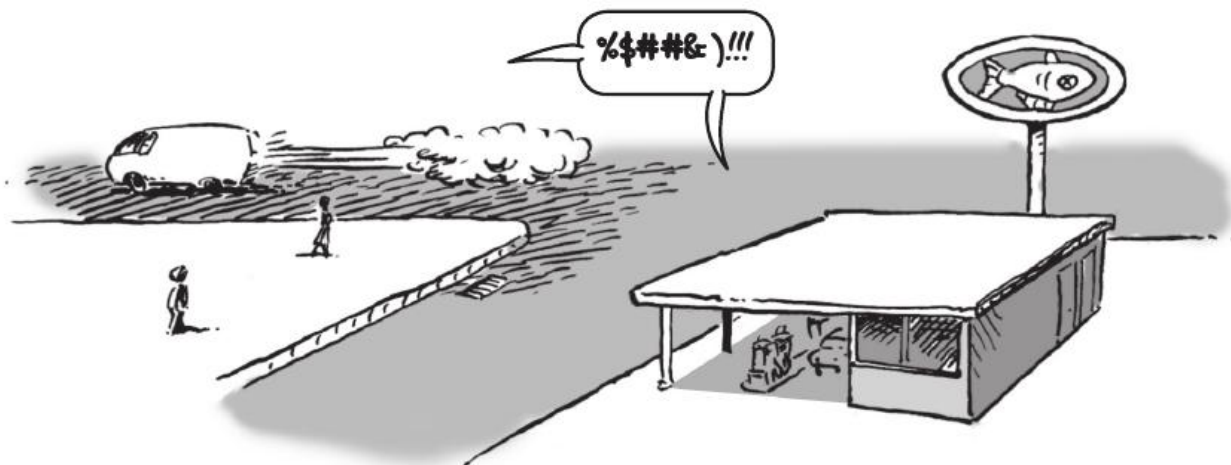
AS DERIVADAS s' E D' SÃO **TAXAS RELACIONADAS.**

CAPÍTULO 5

USANDO DERIVADAS, PARTE 2: OTIMIZAÇÃO

QUANDO FUNÇÕES CHEGAM NO FUNDO (OU NO TOPO)

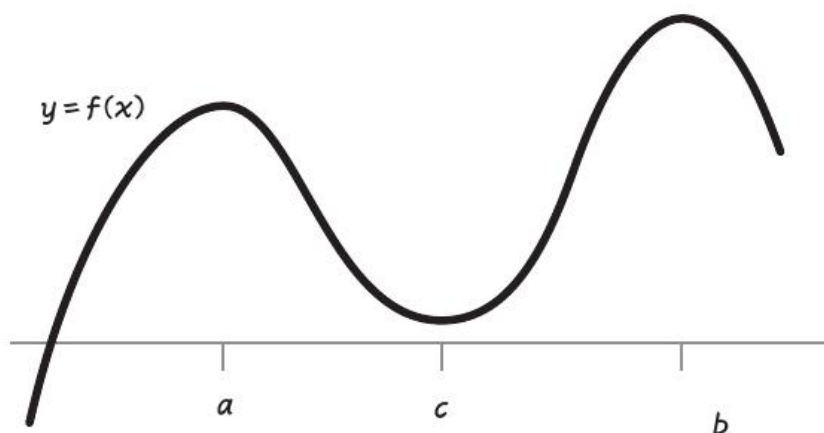
NO MUNDO REAL, AS PESSOAS SEMPRE PROCURAM MODOS PARA **OTIMIZAR** AS COISAS... O QUE SIGNIFICA ENCONTAR O **MELHOR** MODO DE FAZER ALGO... QUEREMOS A MELHOR QUALIDADE - E MÁXIMA QUANTIDADE!

POR EXEMPLO, UMA COMPANHIA DE ENTREGAS QUER MINIMIZAR SEUS CUSTOS COM COMBUSTÍVEL AO BUSCAR UMA ROTA ÓTIMA QUE CONSUMA A MENOR QUANTIDADE DE GASOLINA. UMA COMPANHIA DE PETRÓLEO QUER O OPOSTO!

UM ECÓLOGO TRABALHANDO NUMA COMPANHIA DE PESCA QUER CALCULAR A MÁXIMA QUANTIDADE DE PESCADO COMPATÍVEL COM UMA POPULAÇÃO SUSTENTÁVEL DE PEIXES.

UM FABRICANTE QUER MAXIMIZAR OS LUCROS.

EM TODOS ESTES EXEMPLOS, A SOLUÇÃO ÓTIMA É AQUELA QUE **MAXIMIZA** OU **MINIMIZA** ALGUMA FUNÇÃO.

AQUI ESTÁ A MATEMÁTICA: ➡

UM **MÁXIMO LOCAL** DE UMA FUNÇÃO É UM PONTO a EM QUE O GRÁFICO ATINGE UM TOPO. EM UM MÁXIMO LOCAL a DE UMA FUNÇÃO f, $f(a) \geq f(x)$ PARA TODO x EM ALGUM INTERVALO AO REDOR DE a. UM MÍNIMO LOCAL c É O FUNDO DE UM VALE, EM QUE $f(x) \geq f(c)$ PARA PONTOS x NA VIZINHANÇA. "LOCAL" SIGNIFICA QUE O VALOR DE $f(a)$ É COMPARADO SOMENTE AO DE PONTOS VIZINHOS. PODE HAVER OUTRO MÁXIMO LOCAL b ONDE f É MAIOR, OU SEJA, $f(b) > f(a)$. TANTO O MÁXIMO LOCAL QUANTO O MÍNIMO LOCAL SÃO CHAMADOS **PONTO EXTREMO** LOCAL OU **ÓTIMO** LOCAL.

AQUI a E b SÃO OS DOIS MÁXIMOS LOCAIS E $f(b) > f(a)$. c É UM MÍNIMO LOCAL.

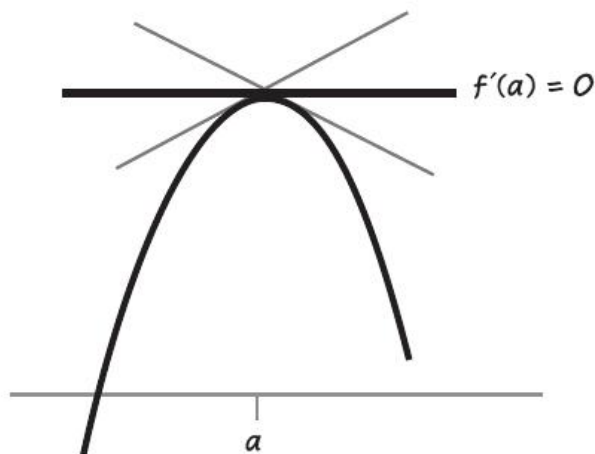
FATO 1 SOBRE EXTREMOS:

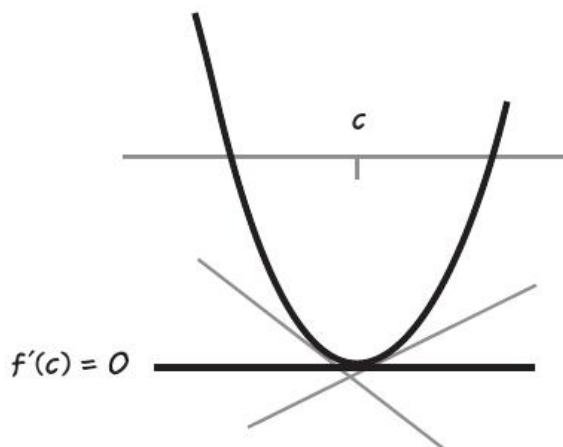
SE a FOR UM EXTREMO LOCAL DE UMA FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL f, ENTÃO

$$f'(a) = 0$$

PROVA: SUPONHA QUE a É UM MÁXIMO LOCAL. ENTÃO, PARA UM h PEQUENO,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \text{ QUANDO } h>0$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \text{ QUANDO } h<0$$

ASSIM, O LIMITE QUANDO $h \rightarrow 0$ DEVE SER TANTO NÃO NEGATIVO COMO NÃO POSITIVO, LOGO É IGUAL A ZERO. SE a FOR UM MÍNIMO LOCAL, ENTÃO É UM MÁXIMO LOCAL DE $-f$, ASSIM, NOVAMENTE, A DERIVADA É NULA.

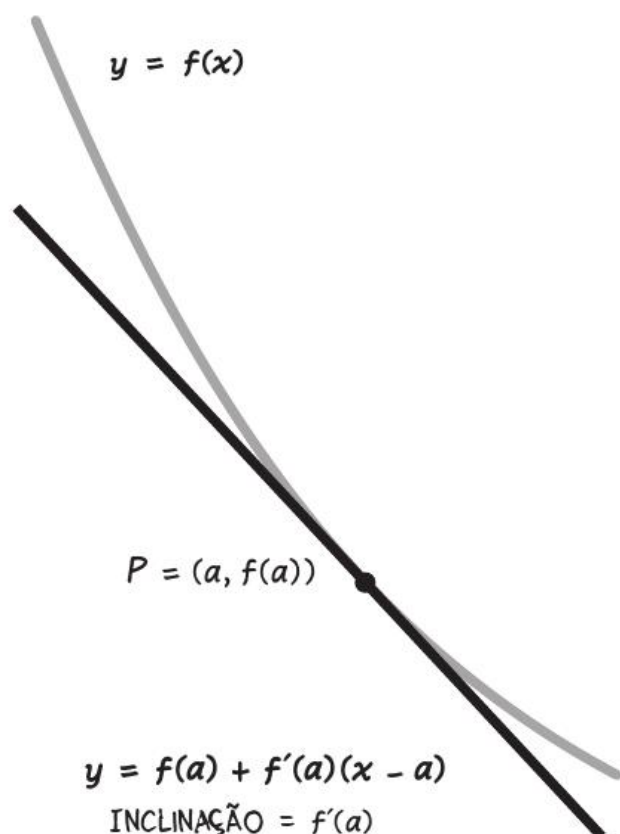
A INCLINAÇÃO DO GRÁFICO EM a ESTÁ MUDANDO DE POSITIVA PARA NEGATIVA, OU VICE-VERSA, E ASSIM CHEGA A ZERO NO PONTO EXTREMO.

CAPÍTULO 6
ATUANDO LOCALMENTE

NO QUAL SEGUIREMOS UMA LINHA

AGORA VAMOS MUDAR UM POUCO A NOSSA PERSPECTIVA. EM VEZ DE ASSISTIRMOS A DERIVADA VAGUEAR EM SEU DOMÍNIO, VAMOS CENTRAR A NOSSA ATENÇÃO NUM ÚNICO PONTO. VOCÊ PODE SE SURPREENDER COM O QUANTO ENCONTRAREMOS LÁ...

NA PÁGINA 121 DESCREVEMOS ALGUMAS PEQUENAS MUDANÇAS DA FUNÇÃO f AO REDOR DE UM PONTO a COM ALGO QUE CHAMAMOS **EQUAÇÃO FUNDAMENTAL** DO CÁLCULO:

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a) + \text{PULGA}$$

ESTA EQUAÇÃO DIZ QUE A DISCREPÂNCIA ENTRE $f(a + h) - f(a)$, OU Δf, NUM LADO E $hf'(a)$ NOUTRO É PEQUENA, SE COMPARADA COM h. ISTO TORNA FÁCIL CALCULAR VALORES APROXIMADOS DE f.

VAMOS ESCREVER $x = a + h$, ASSIM $h = x - a$. ENTÃO, A EQUAÇÃO FUNDAMENTAL PASSA A SER

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \text{PULGA}$$

OU

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \text{PULGA}$$

ENTÃO, ESTE É UM MODO DE DESCREVER A FUNÇÃO ORIGINAL f NA VIZINHANÇA DE a. AGORA SUBTRAÍMOS A PULGA PARA OBTER UMA FUNÇÃO MAIS SIMPLES.

$$T_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

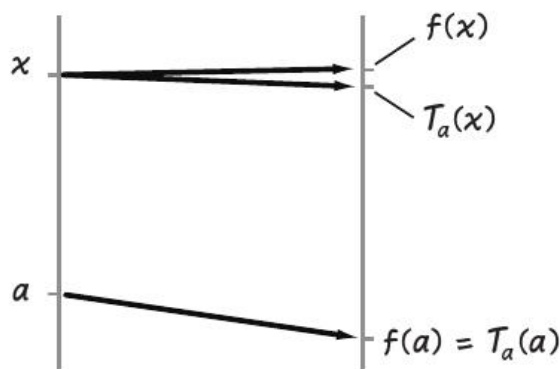
SEU GRÁFICO É UMA LINHA RETA - A PRIMEIRA E ÚNICA LINHA QUE, DE FATO, **PASSA POR a E TEM INCLINAÇÃO $f'(a)$.**

ESTA LINHA, A **TANGENTE** AO GRÁFICO $y = f(x)$ EM a, TOCA A CURVA NO PONTO $P = (a, f(a))$ E TEM INCLINAÇÃO IGUAL À DERIVADA DE f NESSE PONTO. É A FUNÇÃO RETA COM O MESMO VALOR E DERIVADA DE f EM a.

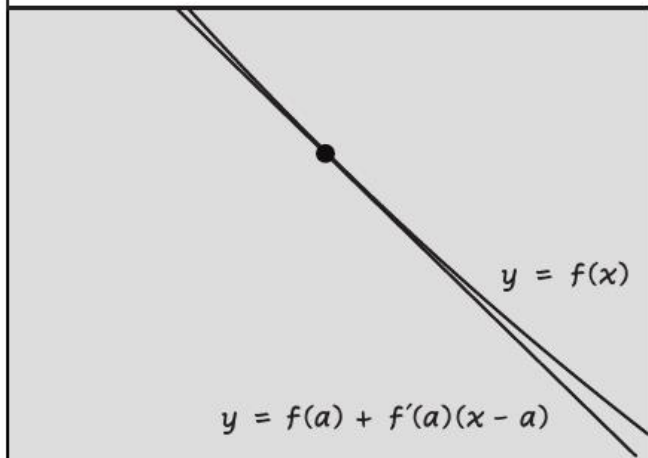
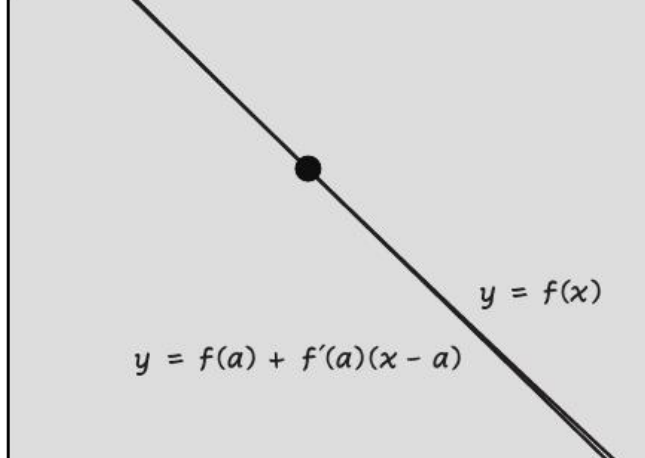
E T_a DIFERE DE f POR UMA PULGA – O QUE SIGNIFICA, COMO VOCÊ LEMBRA, QUE NÃO HÁ APENAS

$$\lim_{x \to a} (T_a(x) - f(x)) = 0$$

MAS HÁ TAMBÉM

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x - a)} (T_a(x) - f(x)) = 0$$

ISTO É, PRÓXIMO AO PONTO a, A DIFERENÇA ENTRE $T_a(x)$ E $f(x)$ É PEQUENA, **MESMO QUANDO COMPARADA A $x - a$.**

PODEMOS EXPRESSAR ISTO AO DIZERMOS QUE, **QUANTO MAIS OLHAMOS DE PERTO O PONTO P, MAIS O GRÁFICO $y = f(x)$ FICA PARECIDO COM UMA RETA.**

PENSE NO PONTO x NA BORDA DO RETÂNGULO CINZA E a NO CENTRO. AGORA OLHE DE PERTO...

O RETÂNGULO CINZA TEM LADO IGUAL A $2(x - a)$, E A DISTÂNCIA ENTRE A CURVA E A LINHA DEVE DIMINUIR ATÉ FICAR INSIGNIFICANTE.

CAPÍTULO 7

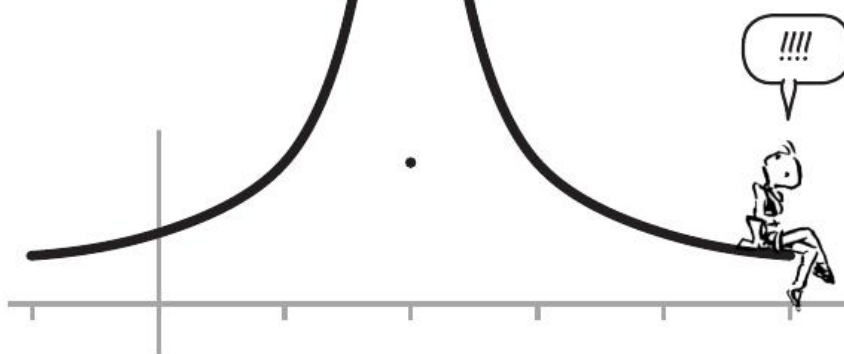
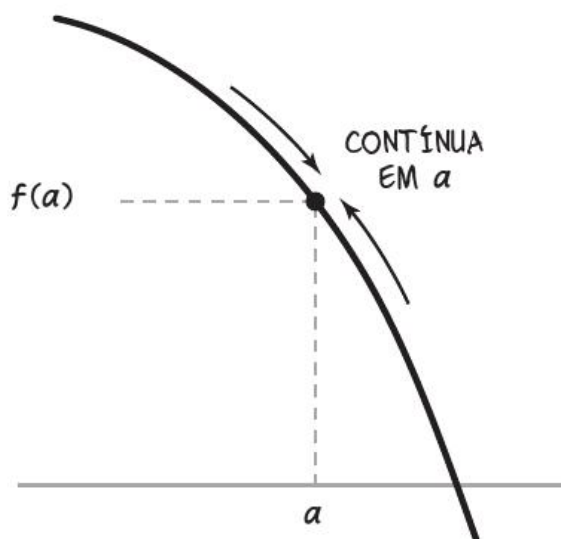
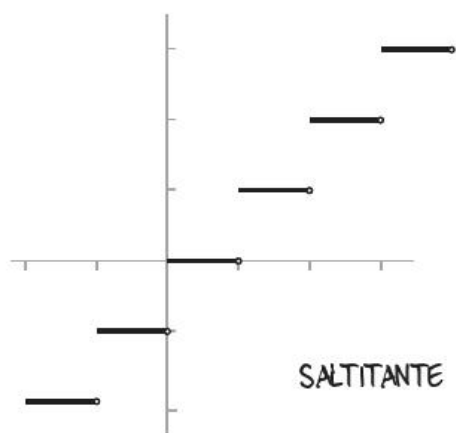
O TEOREMA DO VALOR MÉDIO

ALGUNS PENSAMENTOS TÉORICOS, FRENÉTICOS E FINAIS
(QUE VOCÊ PODE DEIXAR DE LADO SE TUDO O QUE IMPORTAR PARA VOCÊ É COMO USAR O CÁLCULO, E SE NÃO DER A MÍNIMA PARA SEUS FUNDAMENTOS PROFUNDOS, BELOS E ELEGANTES - VEJA SE EU ME IMPORTO!)

DE FATO, ALGUMAS FUNÇÕES **PODEM** SE COMPORTAR DESSE MODO. AQUI ESTÁ UMA:

$$f(x) = \frac{1}{|x-2|} \quad \text{QUANDO} \quad x \neq 2$$

$$f(2) = 1$$

ESTA É UMA FUNÇÃO SEM QUALQUER TIPO DE PROBLEMA. APENAS É UM POUCO MALCOMPORTADA! TENDE A INFINITO QUANDO $x \to 2$, MAS SALTA DE VOLTA PARA UM VALOR FINITO EM $x = 2$. f NÃO POSSUI **MÁXIMOS** EM QUALQUER INTERVALO QUE CONTENHA $x = 2$.

O PROBLEMA DESTA FUNÇÃO É O PONTO ISOLADO (2, 1) EM SEU GRÁFICO... A FUNÇÃO NÃO SE **APROXIMA** DESTE PONTO. ELA SIMPLESMENTE **SALTA** ATÉ ELE, POR ASSIM DIZER... ASSIM, VAMOS VER AS FUNÇÕES SEM QUAISQUER SALTOS... FUNÇÕES CUJO GRÁFICO POSSA SER DESENHADO SEM TIRAR O LÁPIS DO PAPEL. TAIS FUNÇÕES "NÃO SALTITANTES" SÃO DENOMINADAS **CONTÍNUAS**.

DE MODO MATEMÁTICO, DIZEMOS QUE f É **CONTÍNUA NUM PONTO** a SE

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

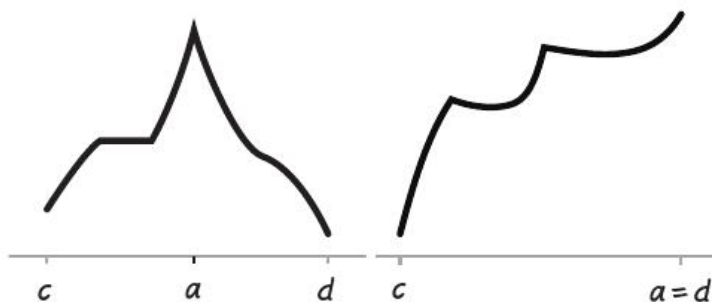
f É DITA **CONTÍNUA NUM INTERVALO** $[c, d]$ SE FOR CONTÍNUA EM TODOS OS PONTOS EM $[c, d]$.

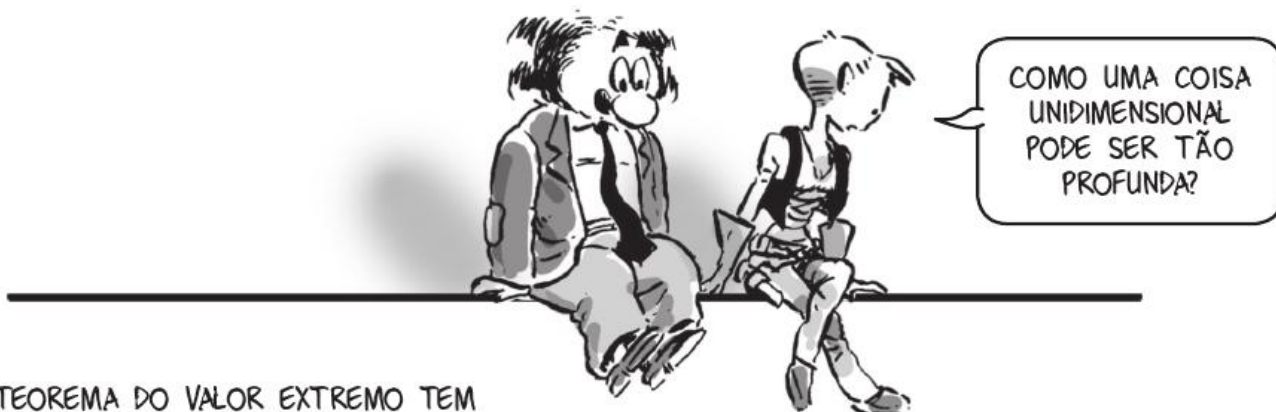
TODAS AS FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS SÃO CONTÍNUAS, MAS NÃO O OPOSTO. SE f É DIFERENCIÁVEL EM a, ENTÃO, SABEMOS QUE $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a)$ + PULGA, ASSIM $\lim_{x \to a} (f(x) = -f(a)) = 0$ OU $\lim_{x \to a} f(x) = -f(a)$. POR OUTRO LADO, UMA FUNÇÃO CONTÍNUA PODE TER CÚSPIDES EM QUE NÃO É DIFERENCIÁVEL.

FUNÇÕES CONTÍNUAS FAZEM O QUE QUEREMOS:

TEOREMA DO VALOR EXTREMO:

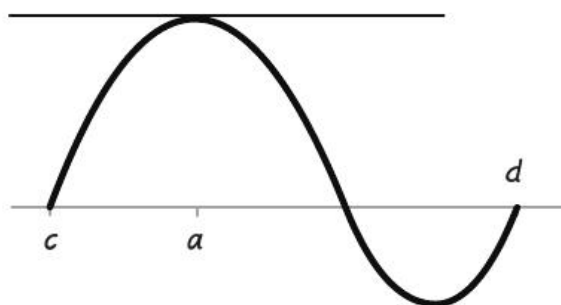
UMA FUNÇÃO CONTÍNUA f DEFINIDA NUM INTERVALO **FECHADO** $[c, d]$ ATINGE UM VALOR MÁXIMO M NO INTERVALO: OU SEJA, HÁ UM PONTO A EM $[c, d]$ EM QUE $f(a) = M$ E $f(x) \leq M$ PARA QUALQUER OUTRO x EM $[c, d]$.

(NOTE QUE ISTO TAMBÉM IMPLICA A EXISTÊNCIA DE UM MÍNIMO, POIS $-f$ DEVE TER UM MÁXIMO!)

PODE ESTAR NO INTERIOR OU EM UMA DAS EXTREMIDADES!

DEVEMOS OMITIR A PROVA, QUE DEPENDE DE PROPRIEDADES PROFUNDAS E SUTIS DOS NÚMEROS REAIS.

O TEOREMA DO VALOR EXTREMO TEM ESSA CONSEQUÊNCIA PARA O CÁLCULO:

TEOREMA DE ROLLE: SE f FOR CONTÍNUA NUM INTERVALO FECHADO $[c, d]$ E DIFERENCIÁVEL EM (c, d), E $f(c) = f(d) = 0$, ENTÃO HÁ PELO MENOS UM PONTO a NO INTERVALO ABERTO (c, d) EM QUE $f'(a) = 0$.

PROVA: SE f FOR A FUNÇÃO CONSTANTE $f = 0$, ENTÃO O RESULTADO É TRIVIAL: QUALQUER PONTO ENTRE c E d SERVIRÁ.

SE f NÃO FOR CONSTANTE, ENTÃO POSSUI VALORES NÃO NULOS. PORTANTO, ATINGE UM MÁXIMO $M > 0$ OU UM MÍNIMO $m < 0$ EM ALGUM PONTO a, CONFORME O TEOREMA DO VALOR EXTREMO. O PONTO a NÃO É UM DOS LIMITES DO INTERVALO, POIS $f(c) = f(d) = 0$, ASSIM, $f'(a) = 0$.

CAPÍTULO 8

APRESENTANDO A INTEGRAL

JUNTANDO DOIS E DOIS E DOIS E DOIS COM MAIS DOIS

O CÁLCULO, COMO TEMOS VISTO, DIVIDE QUANTIDADES EM PEQUENAS PARTES, COISINHAS DIMINUTAS COM NOMES COMO h, Δx, Δy, Δt E Δf. SE P FOR UMA TORTA, ENTÃO ΔP É UMA FATIA FINA DA TORTA.

ATÉ AGORA VIMOS O QUE ACONTECE QUANDO **DIVIDIMOS** UMA DESTAS COISAS POR OUTRA PARA FAZERMOS RAZÕES COMO $\Delta f/h$... MAS, AGORA, QUEREMOS FAZER ALGO DIFERENTE COM NOSSAS MIGALHAS DE NÚMEROS: QUEREMOS **SOMÁ-LAS**.

A ADIÇÃO É MAIS FÁCIL QUE A MULTIPLICAÇÃO... É POR ISSO QUE A APRENDEMOS PRIMEIRO NA ESCOLA... E, DE FATO, MATEMÁTICOS USAVAM O PROCESSO DE SOMATÓRIA DE PARTES MILHARES DE ANOS ANTES DE NEWTON E LEIBNIZ TEREM INVENTADO O CÁLCULO.

HÁ UMA NOTAÇÃO PADRÃO PARA A SOMATÓRIA DE MUITOS ITENS. USA-SE A LETRA GREGA, EQUIVALENTE AO S, **SIGMA** MAIÚSCULA, QUE SIGNIFICA "SOMA".

SE TIVERMOS UMA SEQUÊNCIA DE n NÚMEROS

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_i, \ldots a_n$$

a_i ("A-I") É CHAMADO **i-ÉSIMO TERMO** DA SEQUÊNCIA, E A SOMA DE TODOS OS TERMOS É ESCRITA

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

LÊ-SE "SOMATÓRIA DOS a_i COM i DE 1 A n". A LETRA i É CHAMADA **ÍNDICE** DA SEQUÊNCIA.

A SOMATÓRIA DOS TERMOS CONSECUTIVOS DE ap A aq, INCLUINDO-OS, É:

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$$

POR EXEMPLO, CONSIDERE A SEQUÊNCIA DE CINCO TERMOS {2, 4, 8, 16, 32}. AQUI $a_i = 2^i$ E $n = 5$.

i	a_i
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

NESTE CASO,

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

$$\sum_{i=2}^{4} a_i = 4 + 8 + 16 = 28$$

OK... EU ACHO QUE ESTÁ SOB CONTROLE...

SE FÔSSEMOS DIVIDIR UMA TORTA P EM n FATIAS (POSSIVELMENTE DESIGUAIS), CHAMADAS ΔP_1, ΔP_2, ΔP_3 ..., ΔP_n, ENTÃO, A TORTA INTEIRA SERIA A SOMA:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i$$

ENTÃO, COMO GOSTAMOS DE FAZER EM CÁLCULO, ENCOLHEMOS O TAMANHO DESSAS FATIAS (A UM INFINITESIMAL dP, COMO LEIBNIZ GOSTAVA DE DIZER). NESSE PONTO ESCREVEREMOS A COISA COM UMA FORMA DIFERENTE DE "S", UMA FORMA ESPICHADA, CHAMADA **SINAL DA INTEGRAL**.

$$P = \int dP$$

O.K... ESTA É A NOSSA NOTAÇÃO... É SÓ SOMAR TUDO DAQUI PARA FRENTE...

UMA BOA QUESTÃO:

AGORA VOCÊ PODE SE PERGUNTAR, SE A SOMA É MAIS SIMPLES QUE A DIVISÃO E SE OS ANTIGOS JÁ FAZIAM INTEGRAIS MUITO ANTES DE NEWTON, POR QUE NÃO COMEÇAMOS O LIVRO COM ESTE CAPÍTULO?

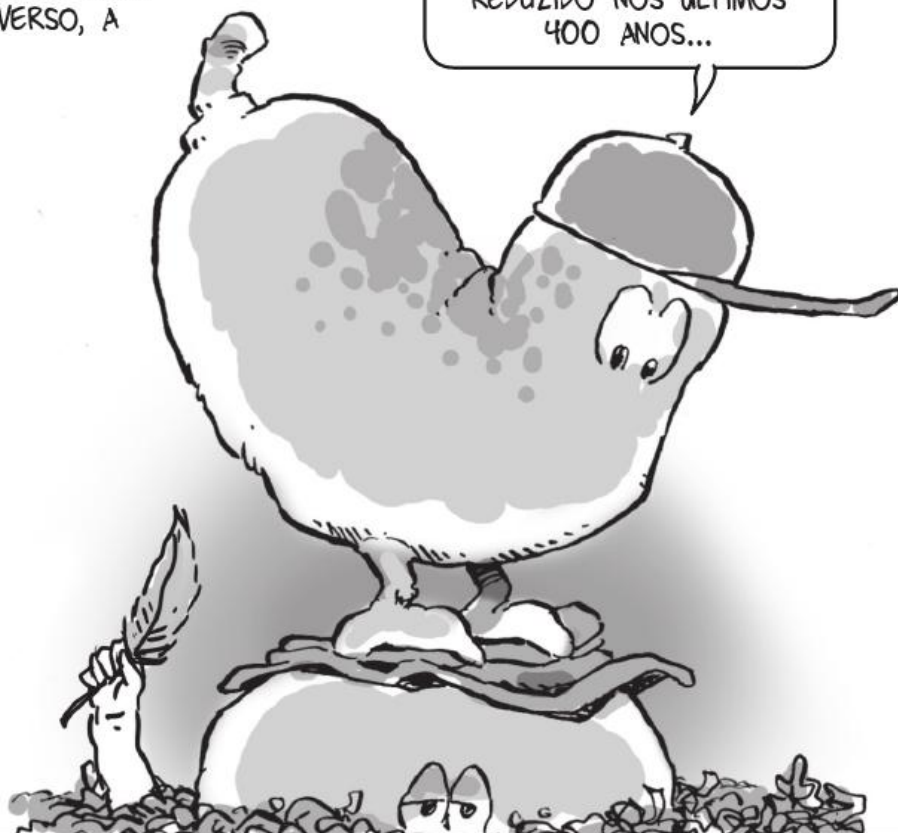
A RESPOSTA É SURPREENDENTE: EMBORA SOMAS POSSAM SER MAIS FÁCEIS DE **IMAGINAR**, ELAS PODEM SER MAIS BEM **CALCULADAS** USANDO **DERIVADAS**!! COMO DESCOBRIRAM NEWTON E LEIBNIZ HÁ UMA RELAÇÃO SURPREENDENTE ENTRE SOMAS E DERIVADAS!

COMO ESTAMOS PRESTES A VER...

CAPÍTULO 9
PRIMITIVAS

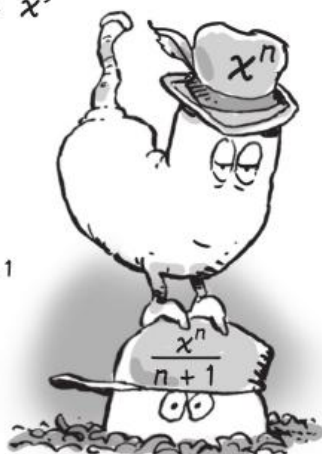
MAIS UMA CONSTANTE!

INFELIZMENTE, O PROCESSO DE ENCONTRAR AS PRIMITIVAS OU ANTIDERIVADAS É **LIGEIRAMENTE** MAIS CONFUSO DO QUE O SEU INVERSO, A DIFERENCIAÇÃO.

POSSIVELMENTE, A FRASE CUJO SIGNIFICADO FOI MAIS REDUZIDO NOS ÚLTIMOS 400 ANOS...

POR EXEMPLO, SE $f(x) = x^3$, ENTÃO $f(x) = \frac{1}{4}x^4$ É UMA PRIMITIVA:

$$F'(x) = \frac{1}{4}(4x^3) = x^3$$

DE FORMA GENÉRICA, $g(x) = x^n$ TEM COMO PRIMITIVA:

$$G(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

ESTA É UMA PRIMITIVA DE g E NÃO **A** PRIMITIVA, POIS HÁ MUITAS OUTRAS. TODAS ESTAS TÊM COMO DERIVADA x^n:

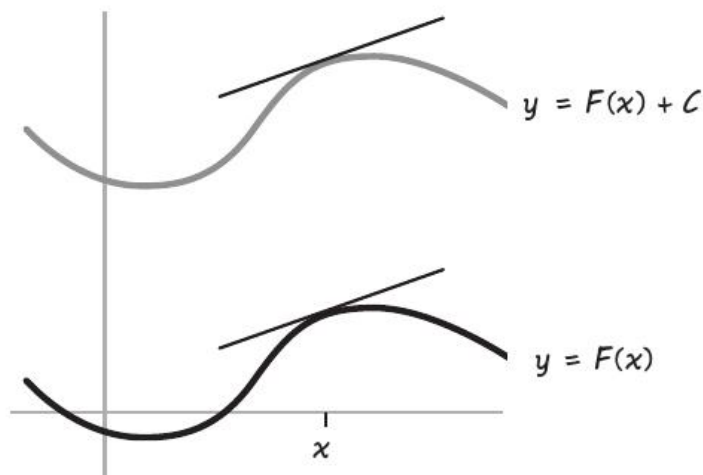
$$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + 3$$

$$H(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + 7$$

$$P(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

PORQUE A DERIVADA DE UMA CONSTANTE É IGUAL A ZERO.

ONDE C É UMA CONSTANTE QUALQUER.

SE F FOR UMA PRIMITIVA DE UMA FUNÇÃO f, ENTÃO $F + C$, PARA QUALQUER CONSTANTE C, TAMBÉM SERÁ.
$(F + C)' = F' = f$.
MOVER O GRÁFICO DE $y = F(x)$ PARA CIMA E PARA BAIXO NÃO AFETA A INCLINAÇÃO NUM PONTO x QUALQUER.

POR OUTRO LADO, SE $F' = f$, ENTÃO **QUALQUER PRIMITIVA** DE f DIFERE DE F POR UMA CONSTANTE.
PROVA: SE G FOR OUTRA PRIMITIVA QUALQUER, ENTÃO $(F - G)'(x) = f(x) - f(x) = 0$ PARA TODO x. MAS PELA CONSEQUÊNCIA (3) DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO (PÁGINA 166), AS ÚNICAS FUNÇÕES COM DERIVADA NULA SÃO CONSTANTES, ASSIM, $F - G = C$, SENDO C UMA CONSTANTE QUALQUER.

AQUI ESTÁ COMO ESCREVER A FÓRMULA QUE SIGNIFICA "A PRIMITIVA DE f É $F + C$":

$$\int f = F + C \quad \text{OU} \quad \int f(x)\, dx = F(x) + C$$

O SÍMBOLO ALTO É UM **SINAL DE INTEGRAL**... A FUNÇÃO f É CHAMADA **INTEGRANDO**. O SÍMBOLO dx ESTÁ LÁ APENAS PARA IDENTIFICAR A VARIÁVEL, COMO ESTÁ EM df/dx, E NÃO É UM TERMO SEPARADO NA EQUAÇÃO. E, COMO USUAL, O NOME DA VARIÁVEL NÃO IMPORTA: TODAS ESTAS EXPRESSÕES SIGNIFICAM A MESMA COISA, NOMEADAMENTE A PRIMITIVA DE f:

$$\int f(x)\, dx, \quad \int f(t)\, dt, \quad \text{E} \quad \int f(y)\, dy$$

A PRIMITIVA É, POR VEZES, CHAMADA **INTEGRAL INDEFINIDA** DE f. INDEFINIDA PORQUE É DETERMINADA SOMENTE ATÉ A CONSTANTE C QUE SE SOMA. POR EXEMPLO,

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

DEPOIS DE JÁ TERMOS CALCULADO MUITAS DERIVADAS, JÁ SABEMOS ESTAS FÓRMULAS:

$$\int dx = x + C$$

(HÁ UM NÚMERO 1 NÃO ESCRITO, APÓS O SINAL DE INTEGRAL.)

$$\int x^p\,dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

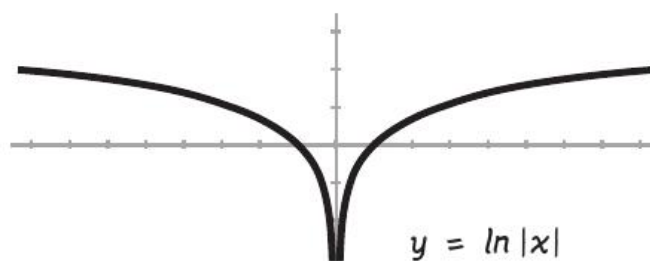
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

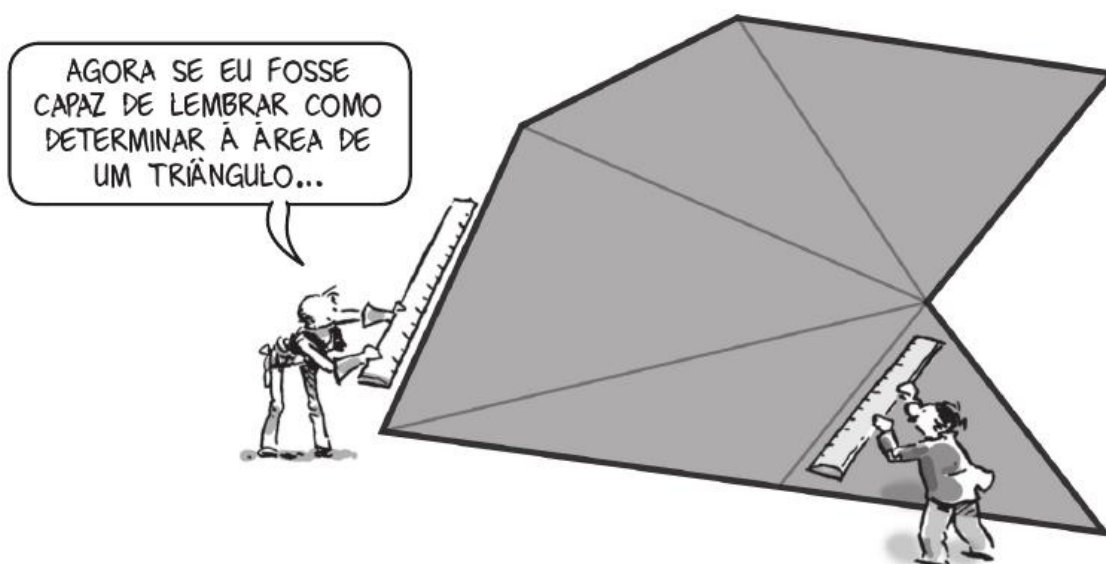
NOTE: O SINAL DE MÓDULO NA ÚLTIMA EQUAÇÃO É JUSTIFICADO, POIS, SE $x < 0$, ENTÃO

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{-1}{(-x)} = \frac{1}{x}$$

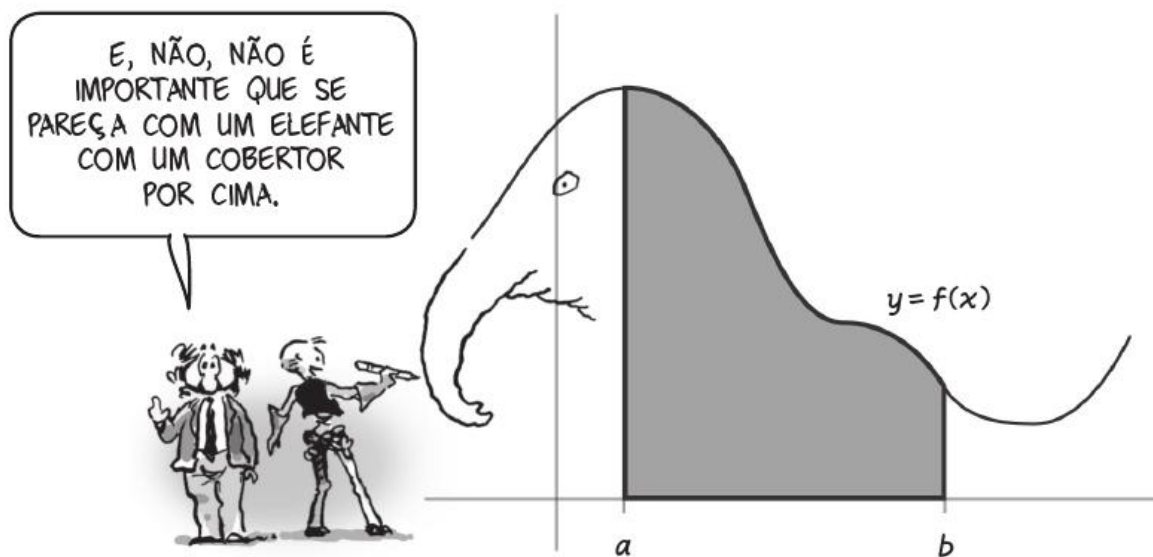
SE $x > 0$, ENTÃO $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ TAMBÉM.

JUNTAS IMPLICAM $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x},\ x \neq 0$

CAPÍTULO 10
A INTEGRAL DEFINIDA

ÁREAS, SOBRE E SOB

O QUE QUEREMOS DIZER AO FALARMOS DA ÁREA INTERNA A UMA FIGURA? SE A REGIÃO FOR RETANGULAR OU TRIANGULAR OU, AINDA, UM MONTE DE RETÂNGULOS E TRIÂNGULOS UNIDOS, TEMOS UMA IDEIA MUITO CLARA DO QUE SE TRATA: BASTA SOMAR A ÁREA DOS TRIÂNGULOS OU RETÂNGULOS.

MAS E SE A FIGURA TIVER UM CONTORNO CURVO? ENTÃO, QUAL SERIA A ÁREA?

MAS SE VOCÊ CHEGOU ATÉ AQUI, PROVAVELMENTE SUSPEITA QUE A RESPOSTA TEM ALGO A VER COM O PROCESSO DE **ENCONTRAR O LIMITE...**

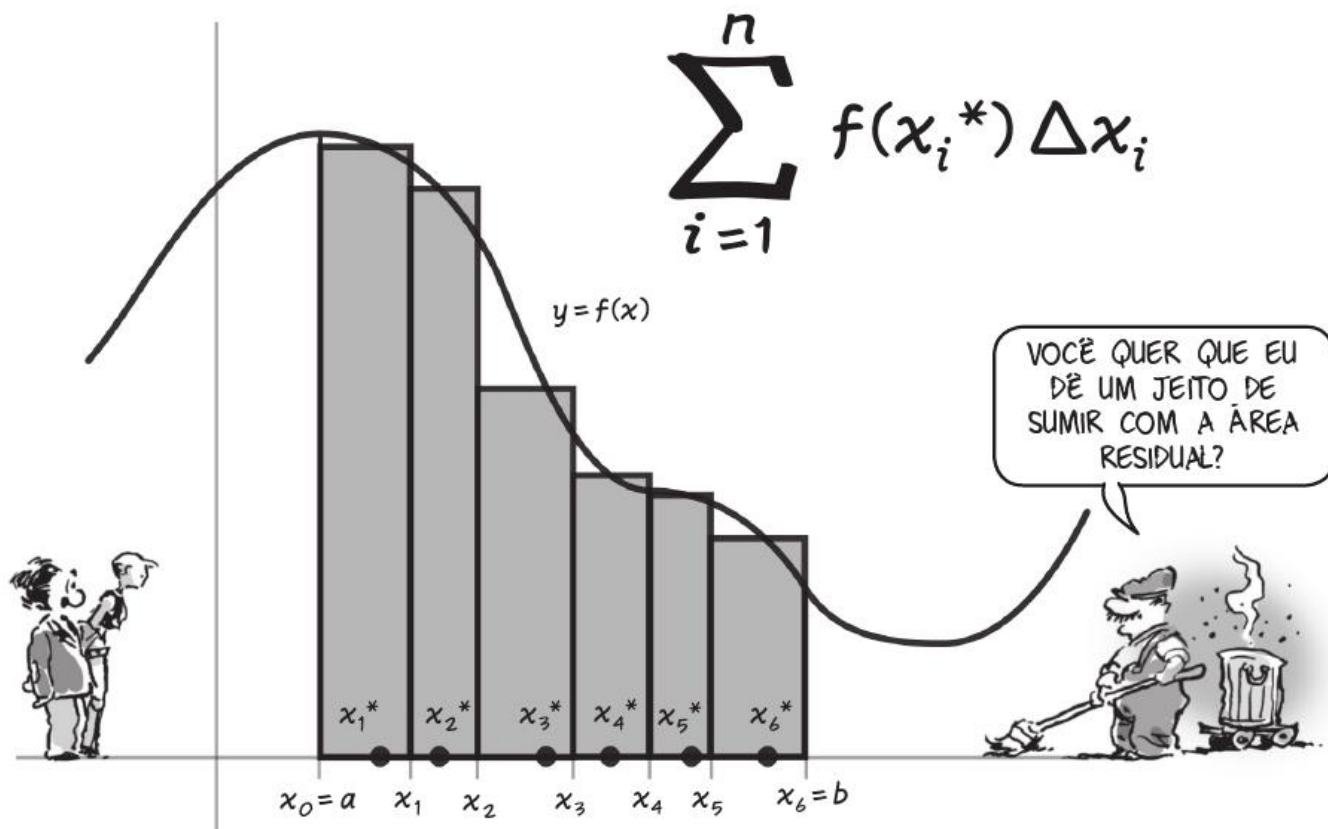
POR QUESTÃO DE SIMPLICIDADE, VAMOS CONSIDERAR UM TIPO ESPECIAL DE REGIÃO LIMITADA EM TRÊS LADOS POR LINHAS RETAS: A ESQUERDA E DIREITA PELAS LINHAS VERTICAIS $x = a$, $x = b$, ABAIXO PELO EIXO x E ACIMA PELO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO QUALQUER $y = f(x)$, QUE ADMITIREMOS, NESTE MOMENTO, COMO SENDO APENAS POSITIVA. ESTA REGIÃO TEM APENAS UM LADO COM CURVAS.

NOSSO PROCEDIMENTO SERÁ MAIS OU MENOS COMO O QUE FIZEMOS NA PÁGINA 171: SUBDIVIDIMOS O INTERVALO $[a, b]$ EM n SUBINTERVALOS, ESPALHANDO OS PONTOS x_0, x_1, x_2, ... x_i, ... x_n, ONDE $x_0 = a$ E $x_n = b$. PARA CADA $i \geq 1$, ESCOLHA QUALQUER PONTO x_i^* NO i-ÉSIMO INTERVALO $[x_{i-1}, x_i]$, E CONSTRUA UM RETÂNGULO NESTE INTERVALO COM ALTURA IGUAL A $f(x_i^*)$, TENDO COMO BASE $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. FINALMENTE, SOME AS ÁREAS DOS RETÂNGULOS PARA OBTER UM VALOR APROXIMADO DA ÁREA DESEJADA.

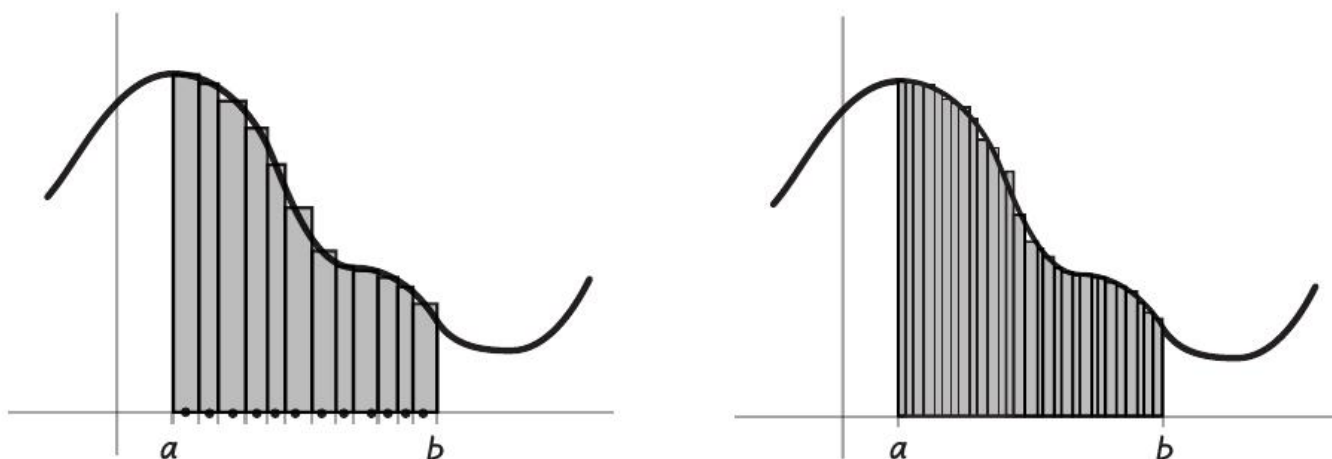
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \Delta x_i$$

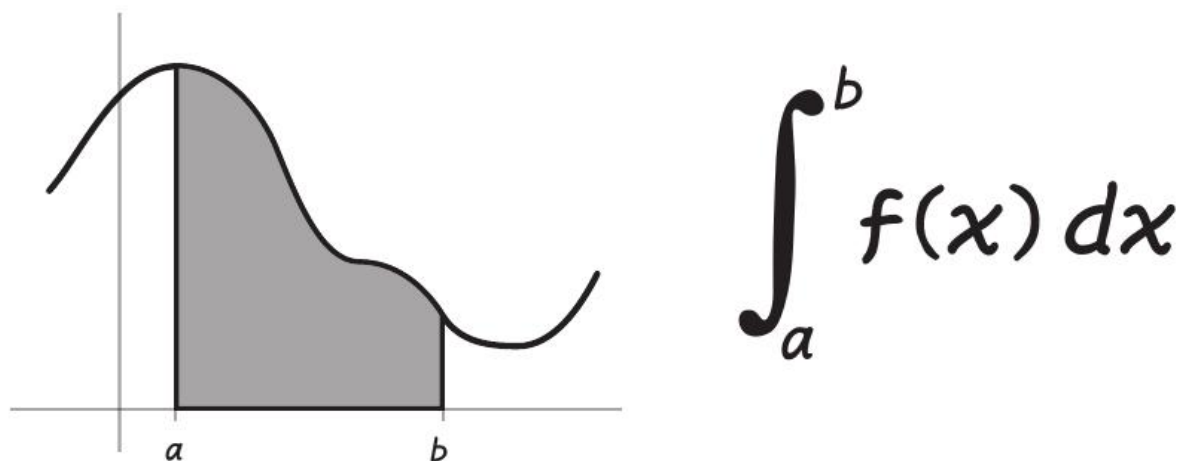
y = f(x)

VOCÊ QUER QUE EU DÊ UM JEITO DE SUMIR COM A ÁREA RESIDUAL?

x_1^* x_2^* x_3^* x_4^* x_5^* x_6^*

$x_0 = a$ x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 $x_6 = b$

ESSA EXPRESSÃO É DENOMINADA **SOMATÓRIA DE RIEMANN**, EM HOMENAGEM A BERNHARD RIEMANN, UM MATEMÁTICO DO SÉCULO XIX QUE ERA TÃO ORIGINAL E BRILHANTE QUE RECEBEU ELOGIOS ATÉ MESMO DO GRANDE GAUSS, QUE NÃO ELOGIAVA NINGUÉM.

O PLANO, ENTÃO, É DEIXAR QUE AS SUBDIVISÕES FIQUEM CADA VEZ MENORES, SIGNIFICANDO QUE O MAIOR $\Delta x_i \to 0$, E VERIFICAMOS SE A SOMA DAS ÁREAS RETANGULARES SE APROXIMA DE UM LIMITE.

A RESPOSTA (POR QUE ESPERAR?) É **SIM**, DESDE QUE A FUNÇÃO f SEJA CONTÍNUA NO INTERVALO $[a, b]$ (VER PÁGINA 164). NESSE CASO, O VALOR LIMITANTE É CHAMADO **INTEGRAL DEFINIDA**, INTERPRETADA COMO A ÁREA SOB A CURVA E ESCRITA DA SEGUINTE FORMA:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

CAPÍTULO 11

FUNDAMENTALMENTE...

NO QUAL TUDO SE JUNTA

NO CAPÍTULO 8, DESCOBRIMOS QUE A POSIÇÃO, PRIMITIVA DA VELOCIDADE, APARECIA COMO A ÁREA SOB O GRÁFICO DA VELOCIDADE. ESSE RESULTADO NÃO É COINCIDÊNCIA, COMO VIMOS. AS INTEGRAIS DE **TODAS** AS BOAS FUNÇÕES SÃO ENCONTRADAS A PARTIR DE SUAS PRIMITIVAS! SEM MAIS DELONGAS, ENTÃO, AQUI ESTÁ O...

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO V.1:

SE f FOR UMA FUNÇÃO CONTÍNUA NO INTERVALO [A, B] E F FOR **QUALQUER** PRIMITIVA DE f EM $[a, b]$, ENTÃO

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

WHISK!

ESTE TEOREMA EXTRAORDINÁRIO UNE DERIVADAS E INTEGRAIS. ELE DIZ: PARA CALCULAR UMA INTEGRAL DEFINIDA, ENCONTRE PRIMEIRO UMA PRIMITIVA DO INTEGRANDO, DEPOIS CALCULE ESSA PRIMITIVA NOS DOIS LIMITES E, FINALMENTE, FAÇA A DIFERENÇA! **E ISSO É TUDO!**

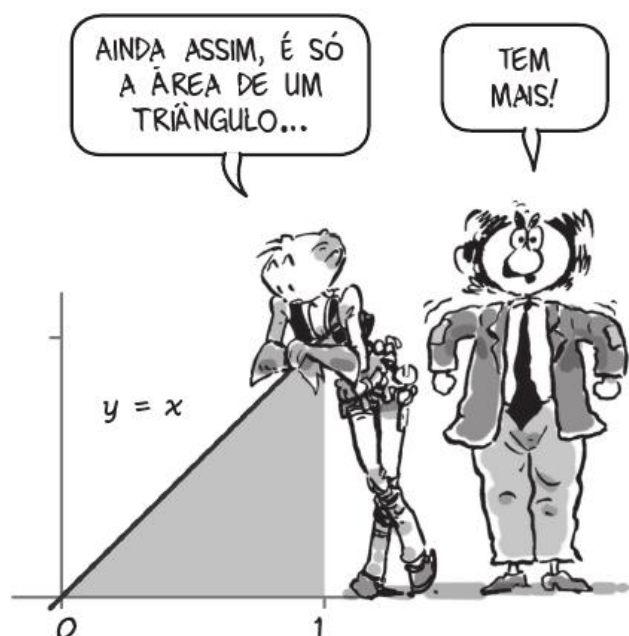
EXEMPLO: ENCONTRE $\int_0^1 x\,dx$

PRIMEIRO, ENCONTRE A PRIMITIVA DE $f(x) = x$. SABEMOS QUE $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ É UMA. O TEOREMA ENTÃO DIZ QUE:

$$\int_0^1 x\,dx = F(1) - F(0)$$

$$= \tfrac{1}{2}(1)^2 - \tfrac{1}{2}(0)^2$$

$$= \mathbf{\tfrac{1}{2}}$$

CONFORME VIMOS, COM MUITO MAIS DIFICULDADE, NAS TRÊS PÁGINAS ANTERIORES.

EXEMPLO: $\int_{-1}^5 x^3 dx$

SABEMOS QUE $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ É UMA PRIMITIVA, ASSIM A INTEGRAL É

$$F(5) - F(-1) = \tfrac{1}{4}(5)^4 - \tfrac{1}{4}(-1)^4$$

$$= \frac{625 - 1}{4} = \mathbf{156}$$

ESTA DIFERENÇA É NORMALMENTE ESCRITA

$$\tfrac{1}{4}x^4 \Big|_{-1}^{5}$$

EXEMPLO: $\int_0^b x^n\,dx$

$G(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ É UMA PRIMITIVA, ASSIM

$$\int_0^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^b = \mathbf{\frac{b^{n+1}}{n+1}}$$

EXEMPLO: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\,d\theta =$

$$-\cos\theta \Big|_0^{\pi/2} = -\cos(\tfrac{\pi}{2}) - (-\cos 0)$$

$$= 0 + 1 = \mathbf{1}$$

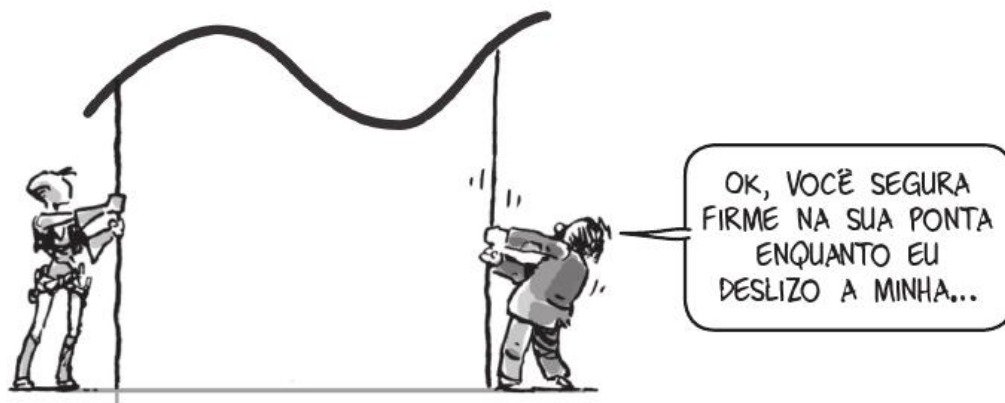
EXEMPLO:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u \Big|_0^1$$

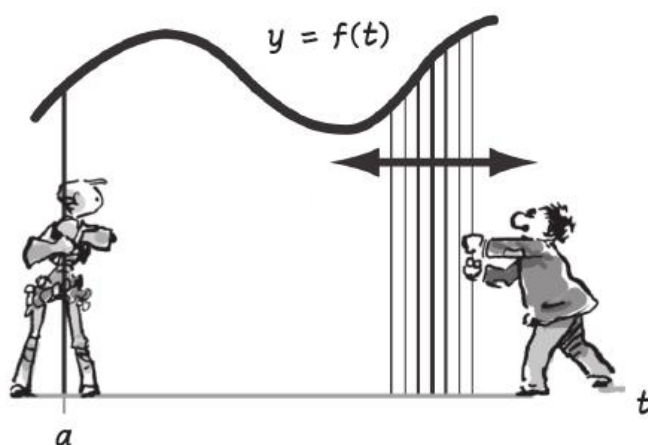
$$= \arctan 1 - \arctan 0$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \mathbf{\frac{\pi}{4}}$$

(AQUI FIZEMOS u COMO A VARIÁVEL DE INTEGRAÇÃO SÓ PARA LEMBRAR A VOCÊ QUE QUALQUER LETRA SERVE!)

AQUI ESTÃO ALGUNS MODOS DE ENTENDER A RELAÇÃO FUNDAMENTAL ENTRE DERIVADAS E INTEGRAIS. UM É VER DIRETAMENTE POR QUE A "DERIVADA DA ÁREA" É A PRÓPRIA FUNÇÃO ORIGINAL. PARA FAZER ISTO, TEMOS DE TRANSFORMAR A INTEGRAL NUMA FUNÇÃO.

BEM, DADA UMA FUNÇÃO f, FIXAMOS UMA EXTREMIDADE DA INTEGRAÇÃO E DEIXAMOS A OUTRA EXTREMIDADE VARIAR. ASSIM, A ÁREA TAMBÉM VARIA: A ÁREA SE TORNA UMA **FUNÇÃO DA SEGUNDA EXTREMIDADE**.

$y = f(t)$

a t

SE x FOR UMA EXTREMIDADE VARIÁVEL E $A(x)$ A ÁREA, PODEMOS ESCREVER ESTA ÁREA* COMO SENDO

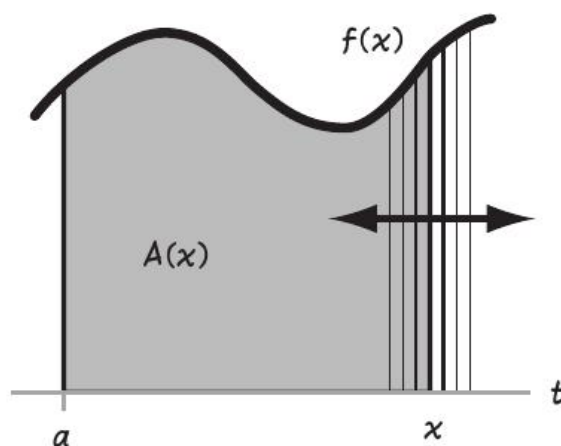
$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ENTÃO, O QUE ESTAMOS DIZENDO É:

$$A'(x) = f(x)$$

$f(x)$

$A(x)$

a x t

* POR ÁREA, SEMPRE QUEREMOS DIZER QUE SE TRATA DA ÁREA ASSINALADA. TAMBÉM TEMOS DE ADMITIR A POSSIBILIDADE DE QUE A EXTREMIDADE VARIÁVEL ESTEJA À **ESQUERDA** DE a, CASO NO QUAL, CONCORDAMOS QUE

$\int_a^x f(t)\,dt$ É IGUAL A $-\int_x^a f(t)\,dt$

CAPÍTULO 12

INTEGRAIS QUE MUDAM DE FORMA

MAIS JEITOS DE ENCONTRAR PRIMITIVAS

PARA INTEGRAR UMA FUNÇÃO, "TUDO" O QUE TEMOS DE FAZER É ENCONTRAR A SUA PRIMITIVA. MAS ISTO PODE NÃO SER FÁCIL... A FUNÇÃO PODE NÃO PARECER FAMILIAR... PODEMOS NÃO RECONHECÊ-LA COMO SENDO A DERIVADA DE OUTRA... PODE PARECER DESANIMADOR... ASSIM, OS MATEMÁTICOS DESENVOLVERAM MÉTODOS PARA IR ARRUMANDO AS INTEGRAIS DE MODO A SER MAIS FÁCIL DE "DESVENDÁ-LAS..."

SUBSTITUIÇÃO DE VARIÁVEIS

DE AGORA EM DIANTE VAMOS ADOTAR A NOTAÇÃO DE LEIBNIZ E USAREMOS dx, dt, du, dV, dF ETC., COMO SE FOSSEM QUANTIDADES PEQUENAS. NÃO SE PREOCUPE COM ISTO! ISTO TORNA A VIDA MAIS FÁCIL E REALMENTE NÃO TE DEIXARÁ EM DIFICULDADES...

VAMOS COMEÇAR COM ESTA EQUAÇÃO BÁSICA, QUANDO u É UMA FUNÇÃO DE x:

$$\frac{du}{dx} = u'(x)$$

QUE PASSA A SER

$$du = u'(x)\,dx$$

QUE REALMENTE CORRESPONDE A

$$\int du = \int u'(x)\,dx = u + C$$

QUE SABEMOS SER VERDADEIRA PELO TEOREMA FUNDAMENTAL!

AGORA VAMOS COLOCAR OUTRA FUNÇÃO v NA CADEIA, EM QUE v É UMA FUNÇÃO DE u. ASSIM COMO ANTES

$$dv = v'(u)\,du$$

SUBSTITUA $du = u'(x)\,dx$ PARA OBTER

$$dv = v'(u(x))\,u'(x)\,dx$$

QUE É OUTRO MODO DE ESCREVER A REGRA DA CADEIA. ISTO SIGNIFICA QUE

$$v + C = \int v'(u)\,du = \int v'(u(x))u'(x)\,dx$$

POR QUE ISTO AJUDA? PORQUE NOS PERMITE SIMPLIFICAR OU TRANSFORMAR A INTEGRAL DA DIREITA NAQUELA DA ESQUERDA!!! PELA **SUBSTITUIÇÃO** DE du POR $u'(x)dx$, OBTEMOS UMA INTEGRAL DE APARÊNCIA MUITO MAIS SIMPLES!!!

EXEMPLO 1: ENCONTRE $\int 2t\cos(t)^2\,dt$

SEJA $u = t^2$, ENTÃO $du = 2t\,dt$, E A INTEGRAL PASSA A SER

$$\int 2t\cos(t)^2\,dt = \int \cos u\,du$$

$$= \text{sen}\,u + C$$

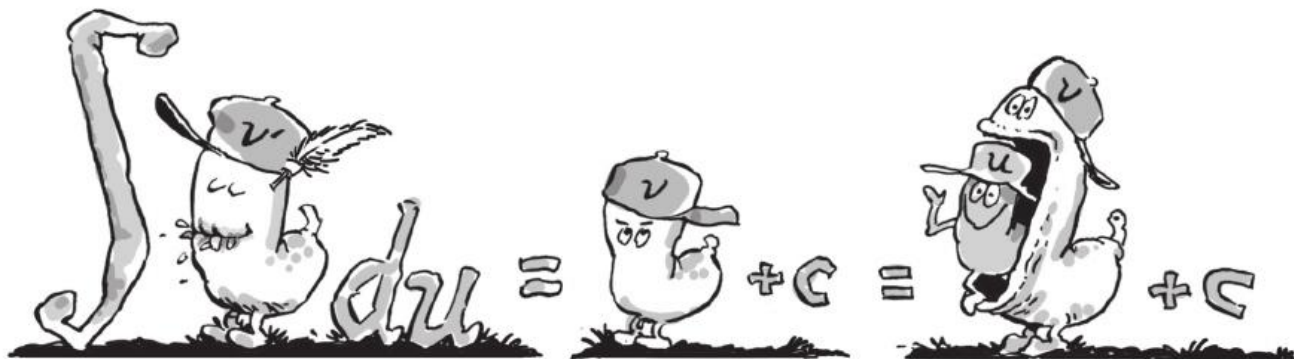
$$= \textbf{sen}\,(t)^2 + C$$

AQUI ESTÁ O PROCEDIMENTO PASSO A PASSO:

1. PROCURE POR UMA FUNÇÃO INTERNA u CUJA DERIVADA u' TAMBÉM APAREÇA COMO FATOR NO INTEGRANDO.

2. ESCREVA $du = u'(t)\,dt$ (OU $u'(x)\,dx$, OU QUALQUER QUE SEJA A VARIÁVEL).

3. EXPRESSE TUDO EM TERMOS DE u.

4. TENTE A INTEGRAÇÃO EM RELAÇÃO A u. SE TIVER SUCESSO, SUBSTITUA u POR $u(t)$ NA RESPOSTA.

CAPÍTULO 13

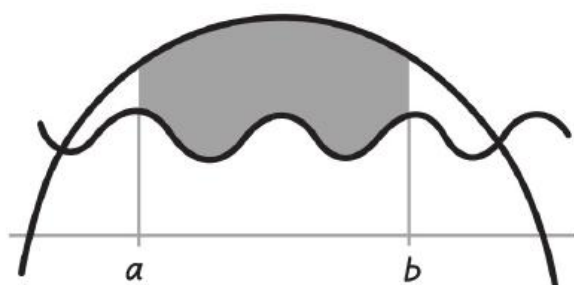
USANDO INTEGRAIS

SABIA QUE ESTE NEGÓCIO SERVE REALMENTE PARA ALGUMA COISA?

AS INTEGRAIS ESTÃO POR TODA A PARTE... BASTA VOCÊ TER OLHOS PARA ENCONTRÁ-LAS.

NESTE CAPÍTULO, ENCONTRAREMOS AS INTEGRAIS EM FUNCIONAMENTO NA GEOMETRIA, NA FÍSICA, NA ECONOMIA, NA ESTATÍSTICA, NOS NEGÓCIOS... ESTAS COISAS SE ACUMULAM EM PRATICAMENTE TODO LUGAR.

ÁREAS E VOLUMES

PODEMOS ENCONTRAR A ÁREA ENTRE DOIS GRÁFICOS INTEGRANDO A **DIFERENÇA** ENTRE DUAS FUNÇÕES.

EXEMPLO: ENCONTRE A ÁREA ENTRE AS DUAS PARÁBOLAS

$$y = f(x) = x^2 + 1 \quad \text{E}$$

$$y = g(x) = -2x^2 + 4.$$

SOLUÇÃO: PRIMEIRO ENCONTRE OS PONTOS EM QUE AS CURVAS SE CRUZAM, OU SEJA, OS VALORES DE x PARA

$$x^2 + 1 = -2x^2 + 4.$$

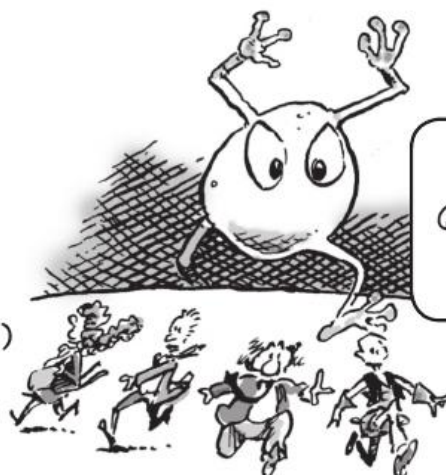
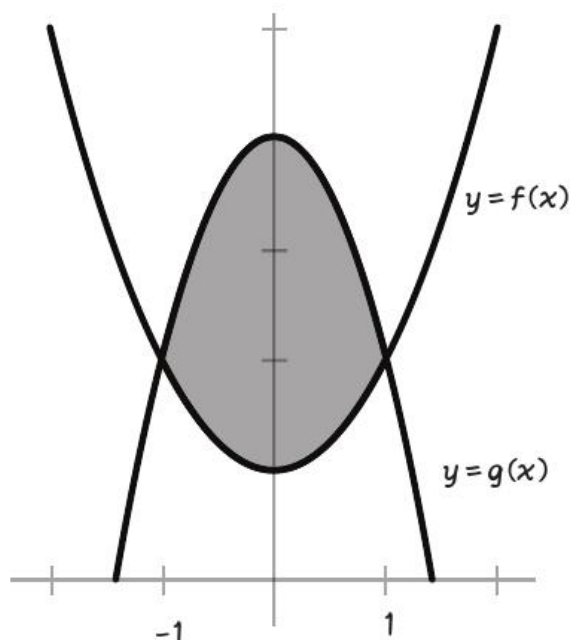
ISTO IMPLICA

$$3x^2 = 3 \quad \text{OU} \quad x = \pm 1.$$

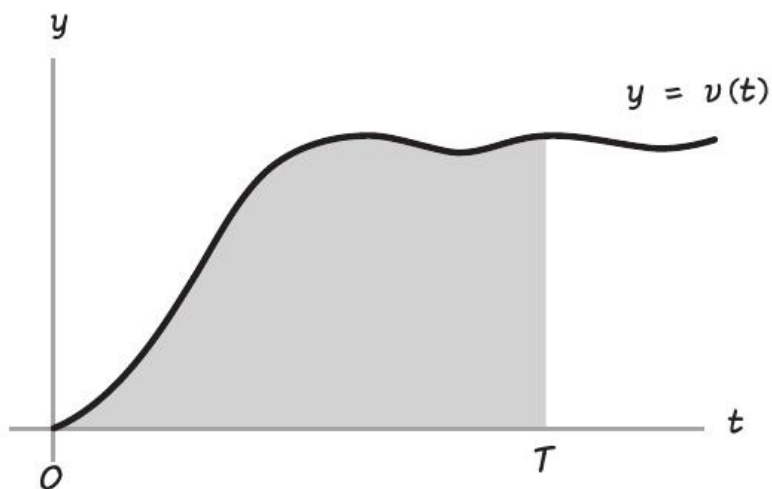
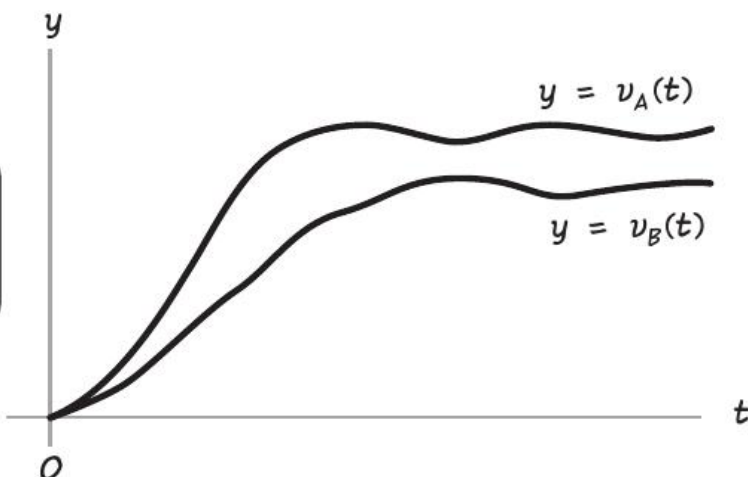
AGORA INTEGRAMOS $g - f$ DE -1 A 1:

$$\int_{-1}^{1} g(x) - f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} -3x^2 + 3\, dx$$

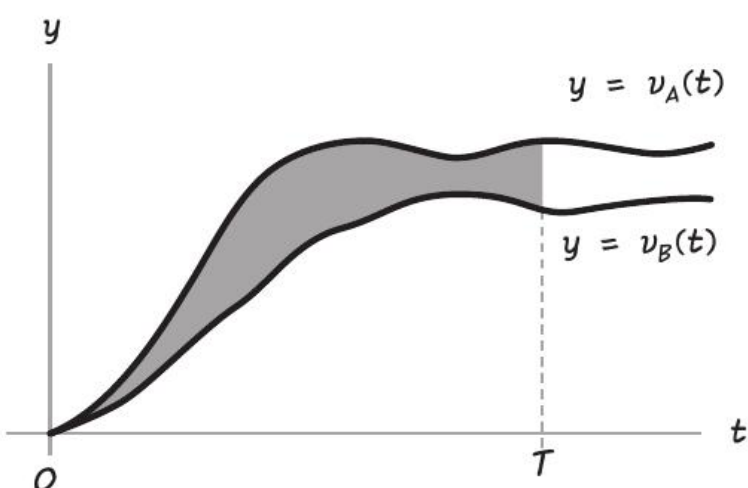
$$= (-x^3 + 3x)\Big|_{-1}^{1} = -1 + 3 - (1 - 3)$$

$$= 4$$

NO MUNDO REAL PODEMOS VER ALGO ASSIM: AQUI ESTÁ A FUNÇÃO VELOCIDADE $v = v(t)$ QUE DESCREVE UM CARRO ACELERANDO DESDE UMA PALAVRA, COMEÇANDO NO MARCO ZERO DE UMA ESTRADA. A ÁREA SOB A CURVA ENTRE 0 E T,

$$\int_0^T v(t)\,dt$$

É A POSIÇÃO DO CARRO NO INSTANTE T.

SE UM AUDI (A) E UM BMW (B) SAEM AMBOS, AO MESMO TEMPO, DO MESMO SEMÁFORO, OS GRÁFICOS DAS SUAS VELOCIDADES PODEM PARECER COM ESTES*:

ENTÃO, A ÁREA (ASSINALADA) ENTRE OS GRÁFICOS v_A E v_B É **O QUÃO DISTANTE O AUDI ESTÁ ADIANTE DO BMW.** ISTO É

$$\int_0^T v_A(t) - v_B(t)\,dt$$

(QUE PODERIA SER NEGATIVA, CASO O BMW ESTIVESSE NA FRENTE).

* ISTO ADMITE QUE A BMW PAROU COMPLETAMENTE. EU MESMO NUNCA VI ISTO PESSOALMENTE, MAS CONTINUO TENDO ESPERANÇAS DE QUE POSSA ACONTECER ALGUM DIA.

CAPÍTULO 14
O QUE VEM DEPOIS?

LEITOR, ESTE LIVRO ESTÁ APENAS COMEÇANDO... HÁ MUITO MAIS COISAS QUE VOCÊ PODE FAZER COM O CÁLCULO. É UMA FERRAMENTA PODEROSA, USADA EM TODAS AS CIÊNCIAS SOCIAIS, BIOLÓGICAS E FÍSICAS, NA ENGENHARIA, NA ECONOMIA E NA ESTATÍSTICA, ALÉM DE SUAS IDEIAS TEREM SIDO AMPLIADAS POR VÁRIAS GERAÇÕES DE MATEMÁTICOS DESDE NEWTON E LEIBNIZ.

AQUI ESTÃO MAIS ALGUNS TÓPICOS AVANÇADOS QUE VOCÊ PODE ENCONTRAR NO CAMINHO:

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

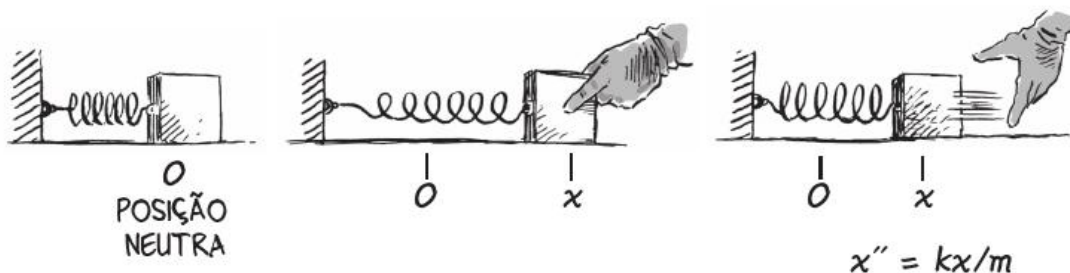
ALÉM DE DESCOBRIR O CÁLCULO, NEWTON TAMBÉM ESTABELECEU UMA LEI FÍSICA FAMOSA QUE RELACIONA FORÇA E VELOCIDADE:

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

QUALQUER EQUAÇÃO QUE CONTENHA DERIVADAS, TAL COMO ESTA, É CHAMADA **EQUAÇÃO DIFERENCIAL**.

OUTRA EQUAÇÃO DIFERENCIAL É A LEI DE HOOKE OU EQUAÇÃO DA MOLA. SE UMA MASSA m É DESLOCADA DE x UNIDADES, DESDE A POSIÇÃO NEUTRA DA MOLA, E SOLTA EM SEGUIDA, ENTÃO A QUALQUER TEMPO SUA ACELERAÇÃO É PROPORCIONAL AO SEU DESLOCAMENTO:

$x''(t) = \frac{k}{m}x(t)$ OU, DADA A PRIMEIRA LEI DE NEWTON, $F = kx$

(k É UMA CONSTANTE QUE DEPENDE DA RIGIDEZ DA MOLA.)

O UNIVERSO É DESCRITO POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS, E RESOLVÊ-LAS É A TAREFA Nº 1 EM CIÊNCIA.

MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

ESTE PONTO DESCREVE AS FUNÇÕES QUE VARIAM EM REGIÕES DO ESPAÇO, EM VEZ DE APENAS AO LONGO DO EIXO x. UMA VEZ QUE O ESPAÇO EM QUE VIVEMOS TEM AO MENOS TRÊS DIMENSÕES, ESTE É UM ASSUNTO OBVIAMENTE IMPORTANTE!

SEQUÊNCIAS E SÉRIES

COMO SUA CALCULADORA DE BOLSO CALCULA SENOS E COSSENOS? VOCÊ SE SURPREENDERIA AO SABER QUE

$$\text{sen}\ x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots$$

INTEGRAIS DE LINHA E DE SUPERFÍCIE

ESTAS SÃO MANEIRAS DE INTEGRAR AO LONGO DE CURVAS OU PELAS SUPERFÍCIES, EM VEZ DAS TRADICIONAIS E MONÓTONAS LINHAS RETAS.

VARIÁVEIS COMPLEXAS

QUANDO FAZEMOS O CÁLCULO COM UM NÚMERO ERRONEAMENTE CHAMADO "IMAGINÁRIO", O $i = \sqrt{-1}$, COISAS ESPETACULARES ACONTECEM!

AS VARIÁVEIS COMPLEXAS NÃO SÓ DESCREVEM, DO "JEITO CERTO", ELETRICIDADE, MECÂNICA QUÂNTICA E OUTROS RAMOS DA FÍSICA, MAS ELAS REVELAM RELAÇÕES MATEMÁTICAS PROFUNDAS, TAIS COMO ESTA EQUAÇÃO ESPANTOSA:

ÍNDICE

NÃO PARE!
CONTINUE...

CÁLCULO EM QUADRINHOS

Larry Gonick

ISBN: 9788521208297

Páginas: 256

Ano de publicação: 2014

Peso: 0.425kg